Sheikh-ul-Aalam Research
Accession No. 368
Class 513
Book No. LAM S
D: 1/9/5/79
Library Srinagar.

سلسلۂ نصابیات علمیہ جامعۂ عثمانیہ

صغاری احصاء

جلد دوم

تصنیف

ہوریس لیمب ایم۔اے ایل ایل ڈی، ایس۔سی۔ڈی، ایف۔آر۔ایس

ترجمہ

قاضی محمد حسین ایم۔اے و کشن چند ایم۔اے

پروفیسران کلیہ جامعۂ عثمانیہ

سنہ ۱۳۴۸ھ م سنہ ۱۳۳۸ف م سنہ ۱۹۲۹ء

دار الطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

یہ کتاب مسرز میکملن اینڈ کمپنی کی اجازت سے جن کو
حق اشاعت حاصل ہے اردو میں ترجمہ کرکے
طبع وشایع کی گئی ہے

۷۸۶

دیباچہ (از مُصنف)

اِس کتاب کے پہلے ایڈیشن کے دیباچہ میں یہ بیان کیا گیا تھا کہ اِس میں احصا کے اُن حصوں کو سمجھانے کی کوشش کیگئی ہے جو زیادہ تر اِس مضمون کے اطلاقات کے لحاظ سے خاص اہمیت رکھتے ہیں۔ اُس وقت اِس کی ترتیب کچھ غیر معمولی سی تھی لیکن معلوم ہوتا ہے کہ یہ سہولت بخش ثابت ہوئی ہے

اِس ایڈیشن کی مکمل نظر ثانی کیگئی ہے اور اِس میں متعدد تبدیلیاں عمل میں لائی گئی ہیں۔ علاوہ معمولی ترمیمات اور ترتیب کی تبدیلیوں کے ایک دو باتوں کا ذکر کردینا ضروری معلوم ہوتا ہے۔

ایک خاص باب قوت نما اور اِس سے متعلق تفاعلوں کے لئے وقف کردیا گیا ہے۔ قوت نما تفاعل کی تعریف یہ کیگئی ہے کہ یہ مساوات

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرا}} = \text{ما}$$

کا معیاری حل ہے۔ اِس تفاعل کی اہمیت ریاضیات میں صرف اِسی خاصیت کی وجہ سے ہے اور اِس لئے اِس کی ابتدا اس خاصیت سے کرنا ہی واجب معلوم ہوتا ہے۔ سلسلہ قوت نما کا کوئی نظریہ جو باضابطہ کہلائے جانیکا کچھ مستحق ہوسکتا ہے بالکل ابتدائی نہیں کہا جاسکتا لیکن

یہ کہنا بیجا نہو گا کہ وہ طریقہ جس کی یہاں پابندی کیگئی ہے علم احصا کے تعلق کے مدنظر کسی اور طریقہ سے زیادہ مشکل نہیں اور ہر لحاظ سے قابل ترجیح بھی ہے۔

لامتناہی سلسلوں کی بحث میں خاص طور پر اِن کے تفرق اور تکمل کے متعلق کئی تبدیلیاں عمل میں لائی گئی ہیں پچھلی اشاعتوں میں اِن سوالوں پر پکیاں استدقاق کے نظریہ کی مدد سے عام طریق پر بحث کی گئی تھی' احصا کی کتاب میں اُس وقت اِس نظریہ کا داخل کرلینا شاید کچھ بیجا نہ تھا جبکہ کسی انگریزی مقالہ میں اس کا ملنا محال تھا لیکن کتاب کے باقی حصہ کے ساتھ موضوع کے لحاظ سے ذرا بے جوڑ ہونے کی وجہ سے اب اسکو ترک کردیا گیا ہے۔ اسکی بجائے وہ بحث داخل کیگئی ہے جو صرف قوتی سلسلوں سے متعلق ہے اور زیادہ تر اسی نمونہ کے سلسلوں سے طالب علم کو واسطہ پڑیگا جب تک کہ وہ مضمون میں زیادہ اعلیٰ مدارج تک ترقی نہ کرجائے۔

کمیت کے مرکزوں' دودرجی معیاروں' اور اسی قبیل کے چیزوں کا اختصار کیا گیا ہے یا انکو ترک کردیا گیا ہے اور ان کا بیشتر حصہ مُصنف کی دوسری کتابوں میں منتقل کردیا گیا ہے فقط

جون سنہ ۱۹۱۹ء

ہوریس لیمب

Sheikh-ul-Aalam Research
Accession No. 368
Class 5.13
Book No. LAM.S
19/5/79
Library Srinagar.

فہرست مضامین

چھٹا باب
تکمل

دفعہ	مضمون	صفحہ
۷۲	مسئلہ کی نوعیت	۲۲۱
۷۳	معیاری شکلیں	۲۲۳
۷۴	ضابطوں کی سادہ توسیع	۲۲۶
۷۵	دو درجی نسب نما والی منطق کسریں	۲۳۸
۷۶	شکل $\frac{\text{ا لا} + \text{ب}}{\sqrt{\text{ا لا}^{2} + \text{۲ ب لا} + \text{ج}}}$	۲۳۲
۷۷	متغیر کی تبدیلی	۲۳۵
۷۸	مثلثی تفاعلوں کا تکمل	۲۳۸
۷۹	مثلثی ابدال	۲۴۰
۸۰	تکمل بالحصص	۲۴۱

۸۱	متواتر تحویل سے تکمل	۲۴۴
۸۲	تحویلی ضابطے (مسلسل)	۲۴۶
۸۳	منطق کسروں کا تکمل	۲۴۸
۸۴	مساوی اصلیں	۲۵۱
۸۵	دو درجی اجزائے ضربی	۲۵۳
۸۶	غیر منطق تفاعلوں کا تکمل	۲۵۷
	امثلہ نمبری ۲۳ تا ۳۰	۲۶۰

ساتواں باب

محدود تکملے

۸۷	تمہید۔ رقبوں کا سوال	۲۷۴
۸۸	مقلوب تفرق کے ساتھ تعلق	۲۷۸
۸۹	تکملہ کی عام تعریف	۲۸۰
۹۰	استدقاق کا ثبوت	۲۸۳
۹۱	$\int_{ا}^{ب}$ فما (لا) فرلا کی خاصیتیں	۲۸۷
۹۲	محدود تکملہ کا تفرق اسکی کسی حد کے لحاظ سے	۲۸۹
۹۳	نامحدود تکملہ کا وجود	۲۹۰
۹۴	محدود تکملہ کے محسوب کرنیکا قاعدہ	۲۹۱
۹۵	وہ صورتیں جہاں تفاعل فما (لا) یا تکمل کے حدود لامتناہی ہو جاتے ہیں۔	۲۹۳
۹۶	دفعہ ۹۴ کے قاعدہ کا استعمال	۲۹۶
۹۷	تحویلی ضابطے	۲۹۸
۹۸	مربوط تکملے	۳۰۲

	امثلہ نمبری ۳۱ تا ۳۵	۳۰۴

آٹھواں باب

ہندسی استعمال

۹۹	رقبہ کی تعریف	۳۱۷
۱۰۰	کارٹیزی محددوں میں رقبہ کے لئے ضابطہ	۳۱۸
۱۰۱	رقبہ کو کیا علامت دیجانی چاہئے	۳۲۱
۱۰۲	قطبی محددوں کے لحاظ سے رقبے	۳۲۴
۱۰۳	رقبہ جو ایک متحرک خط اپنی حرکت میں عبور کرتا ہے	۳۲۶
۱۰۴	ایمسلر کے سطح پیما کا نظریہ	۳۲۹
۱۰۵	مجسموں کے حجم	۳۳۲
۱۰۶	کسی مجسم کے حجم کے لئے عام جملہ	۳۳۴
۱۰۷	گردشی مجسم	۳۳۶
۱۰۸	بعض متعلق صورتیں	۳۳۷
۱۰۹	سمپسن کا قاعدہ	۳۳۸
۱۱۰	منحنی خطوط کا طول معلوم کرنا	۳۴۱
۱۱۱	تعمیم شدہ ضابطے	۳۴۴
۱۱۲	قطبی محددوں کے لحاظ سے قوسیں	۳۴۷
۱۱۳	گردشی سطحوں کے رقبے	۳۴۹
۱۱۴	تقریبی تکمل	۳۵۳
۱۱۵	اوسط قیمتیں	۳۵۷
۱۱۶	ہندسی اشکال کے اوسط مرکز	۳۶۰
۱۱۷	پپیس کے مسئلے	۳۶۴
۱۱۸	ضعفی تکملے	۳۶۸

	امثلہ نمبر ۳۶ تا ۴۱	۳۷۴

نواں باب

خاص منحنی

۱۱۹	جبریہ منحنی جو ایک تشاکل کا محور رکھتے ہیں	۳۸۹
۱۲۰	ماورائی منحنی	۳۹۷
۱۲۱	لیسازو کے منحنی	۴۰۰
۱۲۲	خط تدویر	۴۰۳
۱۲۳	برتدویر اور درتدویر	۴۰۷
۱۲۴	خاص صورتیں	۴۱۱
۱۲۵	دائری حرکتوں کا ایک دوسرے پر انطباق۔ بردورئے	۴۱۶
۱۲۶	قطبی محددوں کے لحاظ سے منحنی۔ لولبی خطوط	۴۲۱
۱۲۷	گھونگا منحنی اور خط صنوبری	۴۲۳
۱۲۸	منحنی $ر^{ن} = ا^{ن}$ جم ن طہ	۴۲۵
۱۲۹	مماسی قطبی مساوات	۴۲۶
۱۳۰	مربوط منحنی۔ تقلیب	۴۲۹
۱۳۱	پائین منحنی۔ تکافی قطبی	۴۳۲
۱۳۲	دو قطبی محدد	۴۳۷
	امثلہ نمبری ۴۲ تا ۴۵	۴۴۲

دسواں باب

انحنا

۱۳۳	انحنا کا ناپ	۴۵۴
۱۳۴	منحنی کی ذاتی مساوات	۴۵۸
۱۳۵	نیم قطر انحنا کے لئے ضابطے	۴۶۱
۱۳۶	نیوٹن کا طریقہ	۴۶۴
۱۳۷	لمسی دائرہ	۴۶۸
۱۳۸	لفاف	۴۷۰
۱۳۹	لفاف دریافت کرنیکا عام طریقہ	۴۷۱
۱۴۰	جبریہ طریقہ	۴۷۳
۱۴۱	لفافوں کی تماسی خاصیت	۴۷۵
۱۴۲	برپیچیہ	۴۷۸
۱۴۳	برپیچیہ کی قوس	۴۸۳
۱۴۴	درپیچے اور متوازی منحنی	۴۸۶
۱۴۵	متحرک شکل کا فوری مرکز	۴۸۸
۱۴۶	لڑھکنے والے منحنیات میں استعمال	۴۹۳
۱۴۷	نقطہ گردونیہ کا انحناء	۴۹۵
۱۴۸	خط گردونیہ کا انحنا	۴۹۹
۱۴۹	کسی شکل کی مسلسل حرکت اپنی مستوی سطح میں	۵۰۱
۱۵۰	بردوریون کی بطور گردونیوں کے دوہری تکوین	۵۰۳
	امثلہ نمبر ۴۶ تا ۴۹	۵۰۶

حصہ دوم

١٦١

چھٹا باب

تکمل

۲۷ – مسئلہ کی نوعیت – ابواب گذشتہ میں ہم نے تفاعلوں کے تغیر کی شرح پر غور کیا ہے – احصا تکملات جسکی طرف اب ہم رجوع ہوتے ہیں بالکل الٹے مسئلہ سے تعلق رکھتا ہے – یعنی اگر تفاعل کے تغیر کی شرح دی ہوئی ہو اور متبوع متغیر کی کسی خاص قیمت کے لئے تفاعل کی قیمت مقرر کردی گئی ہو تو متبوع متغیر کی کسی اور قیمت کے لئے ہمیں تفاعل کی قیمت دریافت کرنا ہے – علامتوں میں مساوات

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{فہ}(\text{لا}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

کا حل درکار ہے جبکہ فہ (لا) متغیر لا کا دیا ہوا تفاعل ہے اس شرط کے تحت کہ لا کی کسی مقررہ قیمت (فرض کرو ا) کے لئے ما ایک خاص قیمت (ب) اختیار کرے – مثلاً متحرک نقطہ کی رفتار کا قانون اور وقت ت پر نقطہ کا مقام دیا گیا ہو تو ان امور کی بنا پر کسی وقت ت پر نقطہ کا مقام دریافت کرنا مقصود ہو سکتا ہے – یہ بات مساوات

$$\frac{\text{فر س}}{\text{فر ت}} = \text{فہ}(\text{ت}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

کو حل کرنے کے معاول ہے جس میں فہ (ت) وقت ت کا معلومہ تفاعل ہے اس شرط کے تحت کہ ت = ت ب کے لئے س = س ب۔

اگر ہم ایک مسلسل تفاعل طہ (لا) ایسا دریافت کر سکیں کہ

طہ (لا) = فہ (لا)

تو مساوات (۱) ذیل کی شکل میں تبدیل ہو جاتی ہے

فر ما / فر لا = فر / فر لا طہ (لا) ....(۳)

پس اگر ما پر مسلسل ہونے کی قید لگا دی جائے جو احصا کے اکثر عملی اطلاقات کی صورت میں پوری ہوتی ہے تو دفعہ ۵۶ کے مطابق

ما = طہ (لا) + م، جہاں م مستقل ہے ......(۴)

مساوات (۱) کا جہاں تک تعلق ہے مستقل م کی ٹھیک قیمت غیر معین ہے، اور اس لئے م، اختیاری مستقل کہلاتا ہے اس سے فائدہ یہ ہے کہ اس کی مدد سے سوال کی باقی ماندہ شرط جس کا ذکر اوپر ہو چکا ہے پوری ہو سکتی ہے۔

پس اگر لا = ا کے لئے ما = ب تو ۱۹۲

ب = طہ (ا) + م

اور اس لئے ما - ب = طہ (لا) - طہ (ا) ....(۵)

اگر دفعہ ۲۵ کے مطابق عامل فر / فر لا کے لئے علامت عف کام میں لائی جائے تو مساوات (۱) ذیل کی شکل میں لکھی جا سکتی ہے

عف، ما = فہ (لا) ....(۶)

اور جبریہ ترقیم کے اصولوں کے مطابق اس کا حل

ما = عف^-۱ فہ (لا) ....(۷)

کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے جبکہ منقلوب عامل عف^-۱ کی تعریف یہ ہو کہ

عف {عف^-۱ فہ (لا)} = فہ (لا) ....(۸)

تفاعل عف^-۱ فہ (لا) ....(۹)

اگر اس کا وجود ہو تو فہ (لا) کا بلحاظ لا کے نامحدود تکملہ کہلاتا ہے۔

عام طور پر اسکو ہم

$$\int \text{فہ}(\text{ا})\ \text{فرا} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

سے تعبیر کرینگے۔

اس ترقیم کی ابتدا کی وجہ اگلے باب میں سمجھائی جائے گی۔ فی الحال (۱۰) کو (۹) کے لکھنے کا ایک دوسرا طریقہ خیال کرنا چاہئے۔

ریاضی کی اکثر شاخوں میں سیدھے اور مقلوب اعمال کے درمیان امتیاز کرنا اکثر ضروری ہوتا ہے۔ سیدھا عمل وہ ہے جو مقررہ قاعدوں کے مطابق کسی دئے ہوئے تفاعل پر ہمیشہ جاری ہوسکے اور اس سے غیر مشتبہ نتیجہ حاصل ہو۔ مقلوب عمل کی نوعیت ایک سوال کی سی ہے یہاں ہمیں وہ تفاعل دریافت کرنا ہوتا ہے جس پر ایک خاص طریقہ سے عمل کرنے سے ایک مقررہ نتیجہ حاصل ہو۔ ممکن ہے کہ اس سوال کا جواب ہو یا اسکا جواب نہ ہو یا ایک سے زیادہ جواب ہوں (دیکھو دفعہ ۱۶)۔ عامل عفتا کی صورت میں ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ اگر اسکا ایک جواب موجود ہو تو جمع کردہ مستقل م کے غیر معین ہونیکی وجہ سے جوابوں کی تعداد لا انتہا ہوگی۔ لیکن ہر صورت میں جواب ملتا ہے یا نہیں ابھی تحقیق طلب ہے۔ تاہم ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ہر مسلسل تفاعل کا نامحدود تکملہ وجود رکھتا ہے اگرچہ اس وسعت کے ساتھ اس مسئلہ کو ثابت کرنیکی ضرورت ہمیں نہیں پڑیگی۔

اس باب کے باقی ماندہ حصے میں ہم مختلف اقسام کے ریاضی تفاعلوں کے نامحدود تکملے عملی طور پر دریافت کرنے کے سوال پر غور کرینگے۔

مثال۔ اگر ایک متحرک نقطہ کی رفتار ع + ج ت دی ہوئی ہے تو

$$\frac{\text{فس}}{\text{فت}} = \text{ع} + \text{ج}\,\text{ت} = \frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left(\text{ع}\,\text{ت} + \frac{1}{2}\,\text{ج}\,\text{ت}^2\right) \quad \ldots\ldots (11)$$

پس

$$\text{س} = \text{ع}\,\text{ت} + \frac{1}{2}\,\text{ج}\,\text{ت}^2 + \text{م} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

شرط $\text{س} = \text{س}_{\text{ب}}$ بوقت $\text{ت} = \text{ت}_{\text{ب}}$ سے م کو دریافت کرکے درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{س} - \text{س}_{\text{ب}} = \text{ع}\left(\text{ت} - \text{ت}_{\text{ب}}\right) + \frac{1}{2}\,\text{ج}\left(\text{ت}^2 - \text{ت}_{\text{ب}}^2\right) \quad \ldots\ldots (13)$$

۳۔۷۔ معیاری شکلیں:۔ کوئی ایسے اٹل قوانین موجود نہیں ہیں جنکی ۱۶۳

مدد سے کسی دئے ہوئے مسلسل تفاعل فہ (لا) کا 'نا محدود تکملہ' فہ (لا) فرلا یا عف$^{-1}$ فہ (لا) دریافت ہو سکے۔ جیساکہ اوپر بتایا جا چکا ہے تکمل مقلوب عمل ہے جس میں تفرق کے سیدھے عمل کے پہلے نتیجوں کی یادداشت ہی رہنما بنائی جا سکتی ہے۔

نیز اگرچہ تکملہ ایک خاص معنی میں ہمیشہ وجود رکھتا ہے لیکن ممکن ہے کہ یہ ریاضی میں عام طور پر استعمال ہونے والے جبریہ یا ماورائی تفاعلوں کے رقوم میں (محدود شکل میں) بیان نہ ہو سکے۔ اسکی مثالیں ہیں

$$\int \text{ہو}^{\text{لا}^2}\,\text{فرلا}\ ،\quad \int \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}\,\text{فرلا}\ ،\quad \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{1+\text{لا}^4}}\ ،$$

اور انکی فہرست آسانی سے بے حد بڑھائی جا سکتی ہے۔

تکملات کی کم و بیش باقاعدہ فہرست بنانے کے لئے سب سے پہلے ہمیں یہ کرنا چاہئے کہ مختلف سادہ تفاعلوں کے تفرقات کی ایک فہرست بنا لیں۔ ان میں سے ہر ایک عمل کی تقلیب سے نا محدود تکمل کا ایک ضابطہ حاصل ہو جائیگا۔ اختیاری مستقل کو جو ہر نا محدود تکملہ میں جمع کیا جاتا ہے صریحی طور پر درج کرنے کی چنداں ضرورت نہیں ہے لیکن بعض اوقات ایک ہی جملہ کے دو مختلف طریقوں سے حاصل کئے ہوئے تکملات میں صرف مستقل کا فرق ہوتا ہے ایسے موقعوں پر اختیاری مستقل کی غیر موجودگی طالب علم پر شدت سے محسوس ہوگی۔

طالب علم کو ذیل کے اساسی نتیجوں سے پوری واقفیت حاصل کرلینی چاہئے۔

$\frac{\text{ف}}{\text{فرلا}}\,\text{لا}^{\text{ن}} = (\text{ن})\,\text{لا}^{\text{ن}-1}$ ؛ $\int \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{فرلا} = \frac{1}{\text{ن}+1} \times \text{لا}^{\text{ن}+1}$ [سوائے جبکہ ن = ۱-] .... (ا)

$\frac{\text{ف}}{\text{فرلا}}\,\text{لوگ لا} = \frac{1}{\text{لا}}$ ؛ $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \text{لوگ لا}$ .... (ب)

$\frac{\text{ف}}{\text{فرلا}}\,\text{ہو}^{\text{ک لا}} = \text{ک}\,\text{ہو}^{\text{ک لا}}$ ؛ $\int \text{ہو}^{\text{ک لا}}\,\text{فرلا} = \frac{1}{\text{ک}} \times \text{ہو}^{\text{ک لا}}$ .... (ج)

$\frac{\text{ف}}{\text{فرلا}}\,\text{جب لا} = \text{جم لا}$ ؛ $\int \text{جم لا}\,\text{فرلا} = \text{جب لا}$ .... (د)

$$\frac{\text{ف}}{\text{فلا}}\,\text{جم}\,\text{لا} = -\,\text{جب}\,\text{لا} \qquad \int \text{جب}\,\text{لا}\ \text{فلا} = -\,\text{جم}\,\text{لا} \;\ldots\ldots (\text{ع})$$

۱۶۴ $$\frac{\text{ف}}{\text{فلا}}\,\text{سس}\,\text{لا} = \text{قط}^{2}\,\text{لا} \qquad \int \text{قط}^{2}\,\text{لا}\ \text{فلا} = \text{سس}\,\text{لا} \;\ldots\ldots (\text{ف})$$

$$\frac{\text{ف}}{\text{فلا}}\,\text{مم}\,\text{لا} = -\,\text{قم}^{2}\,\text{لا} \qquad \int \text{قم}^{2}\,\text{لا}\ \text{فلا} = -\,\text{مم}\,\text{لا} \;\ldots\ldots (\text{گ})$$

$$\frac{\text{ف}}{\text{فلا}}\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \frac{1}{\sqrt{\text{ا}^{2}-\text{لا}^{2}}} \qquad \int \frac{\text{فلا}}{\sqrt{\text{ا}^{2}-\text{لا}^{2}}} = \text{جب}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,^{*} \;\ldots\ldots (\text{ح})$$

$$\frac{\text{ف}}{\text{فلا}}\,\text{سس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \frac{\text{ا}}{\text{ا}^{2}+\text{لا}^{2}} \qquad \int \frac{\text{فلا}}{\text{ا}^{2}+\text{لا}^{2}} = \frac{1}{\text{ا}}\,\text{سس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} \;\ldots (\text{ی})$$

$$\frac{\text{ف}}{\text{فلا}}\,\text{جبز}\,\text{لا} = \text{جمز}\,\text{لا} \qquad \int \text{جمز}\,\text{لا}\ \text{فلا} = \text{جبز}\,\text{لا} \;\ldots\ldots (\text{ژ})$$

$$\frac{\text{ف}}{\text{فلا}}\,\text{جمز}\,\text{لا} = \text{جبز}\,\text{لا} \qquad \int \text{جبز}\,\text{لا}\ \text{فلا} = \text{جمز}\,\text{لا} \;\ldots\ldots (\text{ک})$$

$$\frac{\text{ف}}{\text{فلا}}\,\text{مسز}\,\text{لا} = \text{قطز}^{2}\,\text{لا} \qquad \int \text{قطز}^{2}\,\text{لا}\ \text{فلا} = \text{مسز}\,\text{لا} \;\ldots\ldots (\text{ل})$$

$$\frac{\text{ف}}{\text{فلا}}\,\text{ممز}\,\text{لا} = -\,\text{قمز}^{2}\,\text{لا} \qquad \int \text{قمز}^{2}\,\text{لا}\ \text{فلا} = -\,\text{ممز}\,\text{لا} \;\ldots\ldots (\text{م})$$

$$\frac{\text{ف}}{\text{فلا}}\,\text{جبز}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \frac{1}{\sqrt{\text{لا}^{2}+\text{ا}^{2}}} \qquad \int \frac{\text{فلا}}{\sqrt{\text{لا}^{2}+\text{ا}^{2}}} = \text{جبز}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \text{لوک}\,\frac{\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^{2}+\text{ا}^{2}}}{\text{ا}} \;\ldots (\text{ن})$$

$$\frac{\text{ف}}{\text{فلا}}\,\text{جمز}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \frac{1}{\sqrt{\text{لا}^{2}-\text{ا}^{2}}} \qquad \int \frac{\text{فلا}}{\sqrt{\text{لا}^{2}-\text{ا}^{2}}} = \text{جمز}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \text{لوک}\,\frac{\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^{2}-\text{ا}^{2}}}{\text{ا}} \;\ldots (\text{ط})$$

* علامت کے بارے میں دفعہ ۳۳ دیکھو۔

† علامت کے بارے میں دفعہ ۴۷ دیکھو۔

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\ \text{مسنر}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \frac{\text{ا}}{\text{ا}^2-\text{لا}^2}$ اگر $\text{لا}^2 < \text{ا}^2$، $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ا}^2-\text{لا}^2} = \frac{1}{\text{ا}}\ \text{مسنر}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \frac{1}{2\text{ا}}\ \text{لوک}\ \frac{\text{ا}+\text{لا}}{\text{ا}-\text{لا}}$ ....(پ)

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\ \text{ہمنر}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = -\frac{\text{ا}}{\text{لا}^2-\text{ا}^2}$ اگر $\text{لا}^2 > \text{ا}^2$، $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2-\text{ا}^2} = -\frac{1}{\text{ا}}\ \text{ہمنر}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \frac{1}{2\text{ا}}\ \text{لوک}\ \frac{\text{لا}-\text{ا}}{\text{لا}+\text{ا}}$ ....(ق)

ان میں سے چند ضابطوں کے استعمال میں ذرا احتیاط کی ضرورت ہے۔ اول تو (ح)، (آ)، (ن)، (ط)، (پ)، (ق)، میں ا کی علامت سہولت کے لئے مثبت لے لی گئی ہے۔ یہ ہمیشہ جائز ہے کیونکہ مکمل میں صرف ا کا مربع واقع ہوتا ہے۔
نیز جب لا منفی ہو تو ضابطہ (ب) میں ترمیم کرنی پڑے گی کیونکہ منفی مقدار کا ۱۹۵
لوکارتم نہیں ہوتا۔ اس صورت میں $\bar{\text{لا}} = -\text{لا}$ اور

$\text{ما} = \text{لوک}\ \bar{\text{لا}}$ رکھنے سے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{فرما}}{\text{فر}\bar{\text{لا}}} = -\frac{1}{\bar{\text{لا}}} = \frac{1}{\text{لا}}$$

پس $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \text{لوک}\ \bar{\text{لا}}$

لا کے مثبت یا منفی ہونے کی دونوں صورتیں ذیل کے ضابطے میں شریک ہیں

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \text{لوک}\ |\text{لا}|$$ ....(ب)

نیز (ط) میں لا کو مثبت مان لیا گیا ہے۔ اور (پ) میں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ $|\text{لا}| < \text{ا}$ اور (ق) میں کہ $|\text{لا}| > \text{ا}$۔

۴۷:۔ ضابطوں کی سادہ توسیع:۔ اوپر کے نتائج کی توسیع کرنیکے لئے اول ہم یہ دیکھتے ہیں کہ لا میں مستقل جمع کر دینے سے ضابطوں کی شکل میں کوئی بنیادی فرق نہیں پڑتا۔ [دفعہ ۳۲ (آ) دیکھو]

پس ظاہر ہے کہ $\int (\text{لا}+\text{ا})^{\text{م}}\,\text{فرلا} = \frac{1}{\text{م}+1}(\text{لا}+\text{ا})^{\text{م}+1}$ .... (۱)

$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}+\text{ا}} = \text{لوک}\,(\text{لا}+\text{ا})$ .... (۲)

$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{2\text{ا}\,\text{لا}-\text{لا}^2}} = \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا}^2-(\text{لا}-\text{ا})^2}} = \text{جب}^{-1}\frac{\text{لا}-\text{ا}}{\text{ا}}$ ..... (۳)

اور اسی طرح ـ چند دیگر مثالیں دفعہ ۵، ۷ اور ۶، ۷ میں دی گئی ہیں۔
نیز اگر لا کو مستقل م سے ضرب دے دیا جائے تو تکملہ کی شکل پہلے جیسی ہی رہتی ہے سوائے اسکے کہ وہ م پر تقسیم ہو جاتا ہے۔ [دفعہ ۳۲ (۲) دیکھو]

مثلاً $\int \text{جب ک لا فرلا} = -\frac{1}{\text{ک}}\,\text{جم ک لا}$ .... (۴)

$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ا لا}+\text{ب}} = \frac{1}{\text{ا}}\,\text{لوک}\,(\text{ا لا}+\text{ب})$ .... (۵)

اور علیٰ ہذا القیاس۔

نیز $\int \text{م ع فرلا} = \text{م}\int \text{ع فرلا}$ ..... (۶) جہاں م مستقل ہے

اور $\int (\text{ع}+\text{و}+\text{ھ}+\ldots)\,\text{فرلا} = \int \text{ع فرلا} + \int \text{و فرلا} + \int \text{ھ فرلا} + \ldots$ (۷)

کیونکہ اگر دونوں طرف $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ سے عمل کریں تو ہر ایک صورت میں دفعہ ۲۹ اور ۳۰ کی رو سے ایک مساوات متماثلہ حاصل ہوتی ہے۔ (۷) میں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ارقام کی تعداد محدود ہے۔

پس منطق صحیح تفاعل $\text{ا}_0\text{لا}^{\text{م}} + \text{ا}_1\text{لا}^{\text{م}-1} + \ldots + \text{ا}_{\text{م}-1}\text{لا} + \text{ا}_{\text{م}}$ .... (۸)

کا نامحدود تکملہ $\frac{1}{\text{م}+1}\text{ا}_0\text{لا}^{\text{م}+1} + \frac{1}{\text{م}}\text{ا}_1\text{لا}^{\text{م}} + \ldots + \frac{1}{2}\text{ا}_{\text{م}-1}\text{لا}^2 + \text{ا}_{\text{م}}\text{لا}$ ... (۹)

اب فرض کرو کہ منطق کسر کی شکل ہے $\frac{\text{فا}(\text{لا})}{\text{لا}+\text{ا}}$ .... (۱۰)

عمل تقسیم سے یہ ایک منطق صحیح تفاعل اور کسر $\frac{۱}{لا + ی}$ .... (۱۱)
کے حاصل جمع میں تحویل ہو سکتی ہے۔ پہلے حصے کا تکمل اوپر کے قاعدہ سے عمل میں لا سکتے ہیں اور (۱۱) کا تکمل ہے ۱ لوک (لا + ی) .... (۱۲)

مثال (۱) $\int (لا - ۱)^{\frac{۳}{۲}} فرلا = \frac{۱}{\frac{۳}{۲}+۱}(لا - ۱)^{\frac{۳}{۲}+۱} = \frac{۲}{۵}(لا - ۱)^{\frac{۵}{۲}}$

مثال (۲) $\int \frac{فرلا}{۲لا - ۱} = \frac{۱}{۲}$ لوک $(۲لا - ۱)$

مثال (۳) $\int جب^{۲} لا\ فرلا = \frac{۱}{۲}\int (۱ - جم\ ۲لا)\ فرلا = \frac{۱}{۲}لا - \frac{۱}{۴} جب\ ۲لا$

مثال (۴) $\int مس^{۲} لا\ فرلا = \int (قط^{۲} لا - ۱)\ فرلا = مس\ لا - لا$

مثال (۵) $\int \frac{لا^{۳}}{۲لا - ۱} فرلا = \int \left\{ \frac{۱}{۲}لا^{۲} + \frac{۱}{۴}لا + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸(۲لا - ۱)} \right\} فرلا$

$= \frac{۱}{۶}لا^{۳} + \frac{۱}{۸}لا^{۲} + \frac{۱}{۸}لا + \frac{۱}{۱۶}$ لوک $(۲لا - ۱)$

۷۵ — دو درجی نسب نما والی منطق کسریں:- اب ہم بتائینگے کہ

$\frac{فا(لا)}{لا^{۲} + ب لا + ق}$ .... (۱)

کی شکل کے کسی جملہ کو کس طرح تکمل کر سکتے ہیں جہاں فا(لا) متغیر لا کا منطق صحیح تفاعل ہے۔ اگر ضرورت ہو تو شمار کنندہ کو نسب نما سے تقسیم کرو تاکہ باقی ا لا + ب کی شکل کا رہ جائے۔ پس تفاعل (۱) ایک منطق صحیح تفاعل اور کسر

$\frac{ا لا + ب}{لا^{۲} + ب لا + ق}$ .... (۲)

کے حاصل جمع کی شکل میں ظاہر ہو سکتا ہے۔ پہلا حصہ دفعہ ۷۴ کے طریقہ سے تکمل کیا جا سکتا ہے۔ اب صرف حصہ (۲) پر غور کرنا باقی ہے۔

پہلے ہم $\frac{\text{۱}}{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{پ لا} + \text{ق}}$ .... (۳) پر غور کرینگے۔

نتیجے کی شکل اس بات پر منحصر ہے کہ آیا $\text{پ}^{\text{۲}} \gtreqless \text{۴ ق}$ ۔ اگر $\text{پ}^{\text{۲}} > \text{۴ ق}$ ہے تو دو درجی جملہ حقیقی اور جداگانہ اجزاء ضربی میں تحویل ہو سکتا ہے۔ پس

$$\text{لا}^{\text{۲}} + \text{پ لا} + \text{ق} = (\text{لا} - \text{عہ})(\text{لا} - \text{بہ}) \quad .... (\text{۴})$$

اور مستقلات ا اور ب کو مناسب قیمت دیکر ہم لکھ سکتے ہیں کہ

$$\frac{\text{۱}}{(\text{لا} - \text{عہ})(\text{لا} - \text{بہ})} = \frac{\text{ا}}{\text{لا} - \text{عہ}} + \frac{\text{ب}}{\text{لا} - \text{بہ}} \quad ...... (\text{۵})$$

یہ مساوات متماثلہ ہوگی بشرطیکہ

$$\text{۱} = \text{ا}(\text{لا} - \text{بہ}) + \text{ب}(\text{لا} - \text{عہ}) \quad .... (\text{۶})$$

یعنی $\text{ا} + \text{ب} = \text{۰}$ اور $\text{ا بہ} + \text{ب عہ} = -\text{۱}$ .... (۷)

یعنی $\text{ا} = \frac{\text{۱}}{\text{عہ} - \text{بہ}}$ اور $\text{ب} = -\frac{\text{۱}}{\text{عہ} - \text{بہ}}$ .... (۸)

پس $$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا} - \text{عہ})(\text{لا} - \text{بہ})} = \frac{\text{۱}}{\text{عہ} - \text{بہ}} \left\{ \int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا} - \text{عہ}} - \int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا} - \text{بہ}} \right\}$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{عہ} - \text{بہ}} \left\{ \text{لوک}(\text{لا} - \text{عہ}) - \text{لوک}(\text{لا} - \text{بہ}) \right\}$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{عہ} - \text{بہ}} \, \text{لوک} \, \frac{\text{لا} - \text{عہ}}{\text{لا} - \text{بہ}} \quad .... (\text{۹})$$

جب ہم نے ایک مرتبہ اس بات کو معلوم کر لیا کہ (۵) کے دونوں طرفین متماثلاً مساوی کئے جا سکتے ہیں تو ا اور ب کی قیمت ذیل کے طریقہ سے زیادہ آسانی سے دریافت ہو سکتی ہے۔ اول ہم دونوں طرف (لا − عہ) سے ضرب دیتے ہیں اور پھر اسمیں لا = عہ رکھنے سے ا کی قیمت حاصل ہو جاتی ہے۔ اسی طرح دونوں طرف (لا − بہ) سے ضرب دیکر لا = بہ رکھنے سے ب کی قیمت حاصل ہوتی ہے پس ذیل کا قاعدہ حاصل ہوتا ہے۔ ا دریافت کرنے کے لئے جملہ کے

نسبت نما میں اس کے متناظر جزوی ضربی کو نکالدو اور باقی ماندہ جملہ میں لا = عہ درج کردو ۔ اسی طرح ب کے لئے۔

اگر $\text{پ}^2 = ۴\,\text{ق}$ تو ۱۶۸

$$\text{لا}^2 + \text{پ}\,\text{لا} + \text{ق} = \left(\text{لا} + \tfrac{1}{2}\text{پ}\right)^2$$

اور
$$\int \frac{\text{فرلا}}{\left(\text{لا} + \frac{1}{2}\text{پ}\right)^2} = -\frac{1}{\text{لا} + \frac{1}{2}\text{پ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

اگر $\text{پ}^2 < ۴\,\text{ق}$ تو

$$\text{لا}^2 + \text{پ}\,\text{لا} + \text{ق} = \left(\text{لا} + \tfrac{1}{2}\text{پ}\right)^2 + \left(\text{ق} - \tfrac{1}{4}\text{پ}^2\right) = (\text{لا} - \text{عہ})^2 + \text{بہ}^2$$

جسمیں عہ اور بہ حقیقی ہیں اور بہ کو مثبت لے لیا جاسکتا ہے ۔

اب دفعہ ۳۷ (آ) کی سادہ توسیع سے

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا} - \text{عہ})^2 + \text{بہ}^2} = \frac{1}{\text{بہ}}\,\text{مس}^{-1}\,\frac{\text{لا} - \text{عہ}}{\text{بہ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۱)$$

$\text{پ}^2 > ۴\,\text{ق}$ والا نتیجہ (۱۱) کے مشابہ شکل میں لکھا جاسکتا ہے کیونکہ ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{لا}^2 + \text{پ}\,\text{لا} + \text{ق} = \left(\text{لا} + \tfrac{1}{2}\text{پ}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{4}\text{پ}^2 - \text{ق}\right) = (\text{لا} - \text{عہَ})^2 - \text{بہَ}^2 \ldots (۱۲)$$

جسمیں عہَ اور بہَ حقیقی ہیں اور بہَ کو مثبت فرض کرلیا جاسکتا ہے۔ اب اگر $|\text{لا} - \text{عہَ}| < \text{بہَ}$ ہے تو دفعہ ۴۲ (پ) سے

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{بہَ}^2 - (\text{لا} - \text{عہَ})^2} = \frac{1}{\text{بہَ}}\,\text{مسز}^{-1}\,\frac{\text{لا} - \text{عہَ}}{\text{بہَ}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۳)$$

اسمیں اگر عہَ + بہَ = عہ اور عہَ − بہَ = بہ رکھیں تو دفعہ ۴۶ سے بآسانی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہ (۹) کے معادل ہے ۔

اگر $|\text{لا} - \text{عہَ}| > \text{بہَ}$ تو

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا} - \text{عہَ})^2 - \text{بہَ}^2} = -\frac{1}{\text{بہَ}}\,\text{ممز}^{-1}\,\frac{\text{لا} - \text{عہَ}}{\text{بہَ}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۴)$$

اب زیادہ عام شکل (۲) پر غور کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لہ اور مہ کے مناسب انتخاب سے ہم یہ کرسکتے ہیں کہ

$$\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب} = \text{ل}\,(۲\,\text{لا} + \text{پ}) + \text{م} \quad \ldots\ldots (۱۵)$$

$$\text{یعنی} \quad \text{ل} = \tfrac{1}{2}\,\text{ا} \quad \text{اور} \quad \text{م} = \text{ب} - \tfrac{1}{2}\,\text{ا}\,\text{پ} \quad \ldots\ldots (۱۶)$$

$$\text{پس} \int \frac{\text{ا}\,\text{لا} + \text{پ}}{\text{لا}^2 + \text{پ}\,\text{لا} + \text{ق}}\,\text{فرلا} = \text{ل} \int \frac{۲\,\text{لا} + \text{پ}}{\text{لا}^2 + \text{پ}\,\text{لا} + \text{ق}}\,\text{فرلا} + \text{م} \int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2 + \text{پ}\,\text{لا} + \text{ق}} \quad \ldots\ldots (۱۷)$$

ظاہر ہے کہ بائیں طرف کے دو تکملات میں پہلا

$$\text{لوک}\,(\text{لا}^2 + \text{پ}\,\text{لا} + \text{ق}) \quad \ldots\ldots (۱۸)$$

کے مساوی ہے اور دوسرے پر اوپر بحث ہو چکی ہے۔

اگر نسب نما دو حقیقی جدا گانا اجزا میں تحویل ہو سکتا ہے تو (۱۷) کے دائیں جانب کے تکملہ کو "جزوی کسروں" کے طریقے سے زیادہ آسانی سے دریافت کر سکتے ہیں۔ مثلاً

$$\frac{\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}}{(\text{لا} - \text{عہ})(\text{لا} - \text{بہ})} = \frac{\text{ا}}{\text{لا} - \text{عہ}} + \frac{\text{ب}}{\text{لا} - \text{بہ}} \quad \ldots\ldots (۱۹)$$

۱۶۹ بشرطیکہ $\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب} = \text{ا}\,(\text{لا} - \text{بہ}) + \text{ب}\,(\text{لا} - \text{عہ})$

یعنی بشرطیکہ $\text{ا} + \text{ب} = \text{ا}$ اور $\text{ا}\,\text{بہ} + \text{ب}\,\text{عہ} = -\text{ب}$ ......(۲۰)

$$\text{یعنی} \quad \text{ا} = \frac{\text{ا}\,\text{عہ} + \text{ب}}{\text{عہ} - \text{بہ}} \quad \text{اور} \quad \text{ب} = \frac{\text{ا}\,\text{بہ} + \text{ب}}{\text{بہ} - \text{عہ}} \quad \ldots\ldots (۲۱)$$

ہر صورت میں اس طول عمل کی ضرورت نہیں کیونکہ ا اور ب کی قیمتیں صفحہ (۲۲۹) پر کے طریقہ سے بآسانی دریافت ہو سکتی ہیں۔

$$\text{پس (۱۷) کے تکمل سے} \int \frac{(\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب})\,\text{فرلا}}{(\text{لا} - \text{عہ})(\text{لا} - \text{بہ})} = \text{ا}\,\text{لوک}\,(\text{لا} - \text{عہ}) + \text{ب}\,\text{لوک}\,(\text{لا} - \text{بہ}) \quad \ldots\ldots (۲۲)$$

مثال (۱) $\displaystyle\int \frac{\text{فرلا}}{۲ - \text{لا} - \text{لا}^2}$ کی قیمت دریافت کرو۔

$$\text{فرض کرو کہ} \quad \frac{1}{(۱ - \text{لا})(۲ + \text{لا})} = \frac{\text{ا}}{۱ - \text{لا}} + \frac{\text{ب}}{۲ + \text{لا}}$$

تو مذکورہ بالا طریقہ سے $ا = \frac{۱}{۳}$ اور $ب = \frac{۱}{۳}$

$$\text{پس} \int \frac{فرلا}{۲-لا-لا^{۲}} = -\frac{۱}{۳} لوک(۱-لا) + \frac{۱}{۳} لوک(۲+لا) = \frac{۱}{۳} لوک \frac{۲+لا}{۱-لا}$$

بطریقہ دیگر

$$\int \frac{فرلا}{۲-لا-لا^{۲}} = \int \frac{فرلا}{\frac{۹}{۴}-(لا+\frac{۱}{۲})^{۲}} = \frac{۲}{۳} مسز^{-۱} \frac{لا+\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۲}{۳} مسز^{-۱} \frac{۲لا+۱}{۳}$$

$$\text{مثال (۲)-} \int \frac{فرلا}{۱-۴لا+۴لا^{۲}} = \int \frac{فرلا}{(۲لا-۱)^{۲}} = -\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲لا-۱}$$

$$\text{مثال (۳)-} \int \frac{فرلا}{۱-لا+لا^{۲}} = \int \frac{فرلا}{(لا-\frac{۱}{۲})^{۲}+\frac{۳}{۴}} = \frac{۲}{\sqrt{۳}} مس^{-۱} \frac{لا-\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۳}} مس^{-۱} \frac{۲لا-۱}{\sqrt{۳}}$$

$$\text{مثال (۴)-} \int \frac{۱-لا}{۱-لا+لا^{۲}} فرلا = \int \frac{-\frac{۱}{۲}(۲لا-۱)+\frac{۱}{۲}}{۱-لا+لا^{۲}} فرلا$$

$$= \frac{۱}{۲} \int \frac{فرلا}{۱-لا+لا^{۲}} - \frac{۱}{۲} \int \frac{۲لا-۱}{۱-لا+لا^{۲}} فرلا = \frac{۱}{\sqrt{۳}} مس^{-۱} \frac{۲لا-۱}{\sqrt{۳}} - \frac{۱}{۲} لوک(۱-لا+لا^{۲})$$

مثال (۵)- $\frac{۲لا-۳}{(لا-۲)(لا+۱)}$ کو تکمل کرو۔ ۱۷۰

فرض کرو کہ $\frac{۲لا-۳}{(لا-۲)(لا+۱)} = \frac{ا}{لا-۲} + \frac{ب}{لا+۱}$

اس سے حاصل ہوتا ہے کہ $ا = \frac{۱}{۳}$ اور $ب = \frac{۵}{۳}$

اس لئے زیر بحث تکملہ $= \frac{۱}{۳} لوک(لا-۲) + \frac{۵}{۳} لوک(لا+۱)$

۷۶- شکل $\frac{الا+ب}{\sqrt{الا^{۲}+ب لا+ج}}$ -

اس قسم کے تفاعلوں کے لئے بھی اوپر سے ملتا جلتا طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔

(آ) اگر ا مثبت ہے تو یہ ذیل کی شکل کے مماثل ہے

$$\frac{\text{ا لا} + \text{ب}}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{پ لا} + \text{ق}}} \quad \cdots\cdots (1)$$

سب سے پہلے شکل

$$\frac{1}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{پ لا} + \text{ق}}} \quad \cdots\cdots (2)$$

پر غور کرو۔

مربع کو کامل بنانے سے جذری علامت کے اندر کا جملہ $(\text{لا} - \text{عہ})^2 \pm \text{بہ}^2$ کی ایک یا دوسری شکل میں رکھا جا سکتا ہے۔ اب دفعہ ۲۷ (صد) اور (طص) سے

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{(\text{لا} - \text{عہ})^2 + \text{بہ}^2}} = \text{جنز}^{-1}\, \frac{\text{لا} - \text{عہ}}{\text{بہ}} \quad \cdots\cdots (3)$$

اور

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{(\text{لا} - \text{عہ})^2 - \text{بہ}^2}} = \text{جمز}^{-1}\, \frac{\text{لا} - \text{عہ}}{\text{بہ}} \quad \cdots\cdots (4)$$

ان تفاعلوں کو ذیل کی شکلوں میں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\text{لوک}\; \frac{\text{لا} - \text{عہ} + \sqrt{(\text{لا} - \text{عہ})^2 \pm \text{بہ}^2}}{\text{بہ}} \;\; \text{یا لوک}\; \frac{\text{لا} - \text{عہ} + \sqrt{\text{لا}^2 + \text{پ لا} + \text{ق}}}{\text{بہ}} \quad \cdots\cdots (5)$$

[دفعہ ۲۶ ۴ دیکھو]

عام صورت (۱) میں ہم فرض کرتے ہیں

$$\text{ا لا} + \text{ب} = \text{لہ} \left(\text{لا} + \tfrac{1}{2}\,\text{پ}\right) + \text{مہ} \quad \cdots\cdots (6)$$

۱۷۱ جو پوری ہوتی ہے اگر $\text{لہ} = \text{ا}$ اور $\text{مہ} = \text{ب} - \tfrac{1}{2}\,\text{پ ا}$ ……… (۷)

اسلئے

$$\int \frac{\text{ا لا} + \text{ب}}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{پ لا} + \text{ق}}}\,\text{فرلا} = \text{لہ} \int \frac{\text{لا} + \tfrac{1}{2}\,\text{پ}}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{پ لا} + \text{ق}}}\,\text{فرلا} + \text{مہ} \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{پ لا} + \text{ق}}} \quad \cdots\cdots (8)$$

پہلا تکملہ $\sqrt{\text{لا}^2 + \text{پ لا} + \text{ق}}$ کے مساوی ہے اور دوسرے پر بحث ہو چکی ہے۔

(۲) اب ہم فرض کرتے ہیں کہ اس دفعہ کی ابتدائی شکل میں نسر ا منفی ہے تو تعمیم خصوصیت میں فرق آنے کے بغیر اسے ۱ کے مساوی لیا جا سکتا ہے۔

پہلے تفاعل

$$\frac{1}{\sqrt{\text{ق} + \text{پ لا} - \text{لا}^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۹)$$

پر غور کرو۔

اب سوائے اس صورت کے جبکہ دو درجی جملہ حقیقتاً منفی ہو (جس صورت میں لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے یہ خیالی ہوگا) جملہ کو $\text{ب}^2 - (\text{لا} - \text{ص})^2$ کی شکل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

$$\text{اب} \quad \int \frac{\text{فلا}}{\sqrt{\text{ب}^2 - (\text{لا} - \text{ص})^2}} = \text{جب}^{-1} \frac{\text{لا} - \text{ص}}{\text{ب}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

تفاعل کی عام صورت

$$\frac{\text{ا لا} + \text{ب}}{\sqrt{\text{ق} + \text{پ لا} - \text{لا}^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۱)$$

میں فرض کرو کہ $\text{ا لا} + \text{ب} = \text{ل} \left(\tfrac{1}{2}\text{پ} - \text{لا}\right) + \text{ص}$ ......(۱۲)

یعنی $\text{ل} = -\text{ا}$ اور $\text{ص} = \text{ب} + \tfrac{1}{2}\text{ا پ}$ ......(۱۳)

$$\text{اس لئے} \quad \int \frac{\text{ا لا} + \text{ب}}{\sqrt{\text{ق} + \text{پ لا} - \text{لا}^2}}\,\text{فلا} = \text{ل} \int \frac{\tfrac{1}{2}\text{پ} - \text{لا}}{\sqrt{\text{ق} + \text{پ لا} - \text{لا}^2}}\,\text{فلا}$$

$$+\, \text{ص} \int \frac{\text{فلا}}{\sqrt{\text{ق} + \text{پ لا} - \text{لا}^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۴)$$

ان دو میں سے پہلا تکملہ $\sqrt{\text{ق} + \text{پ لا} - \text{لا}^2}$ کے مساوی ہے اور دوسرے پر اوپر بحث ہو چکی ہے۔

$$\text{مثال ۱-} \int \frac{1 + \text{لا}}{\sqrt{1 - \text{لا} - \text{لا}^2}}\,\text{فلا} = \int \frac{\tfrac{1}{2} + (\text{لا} + \tfrac{1}{2})}{\sqrt{1 - \text{لا} - \text{لا}^2}}\,\text{فلا} = \int \frac{\text{لا} + \tfrac{1}{2}}{\sqrt{1 - \text{لا} - \text{لا}^2}}\,\text{فلا}$$ ۱۶۲

$$+\, \frac{1}{2} \int \frac{\text{فلا}}{\sqrt{\tfrac{5}{4} - (\text{لا} + \tfrac{1}{2})^2}} = -\sqrt{1 - \text{لا} - \text{لا}^2} + \frac{1}{2}\,\text{جب}^{-1} \frac{\text{لا} + \tfrac{1}{2}}{\tfrac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$= -\sqrt{1 - \text{لا} - \text{لا}^2} + \frac{1}{2}\,\text{جب}^{-1} \frac{2\text{لا} + 1}{\sqrt{5}}$$

مثال ۲ - $\int \frac{\text{لا}+1}{\sqrt{\text{لا}^2+\text{لا}+1}}\,\text{فرلا} = \int \frac{(\text{لا}+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}{\sqrt{\text{لا}^2+\text{لا}+1}}\,\text{فرلا} = \int \frac{\text{لا}+\frac{1}{2}}{\sqrt{\text{لا}^2+\text{لا}+1}}\,\text{فرلا}$

$+\frac{1}{2}\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{(\text{لا}+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} = \sqrt{\text{لا}^2+\text{لا}+1} + \frac{1}{2}\,\text{جبز}^{-1}\,\frac{\text{لا}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$

$= \sqrt{\text{لا}^2+\text{لا}+1} + \frac{1}{2}\,\text{جبز}^{-1}\,\frac{2\,\text{لا}+1}{\sqrt{3}}$

مثال ۳:- $\int \sqrt{\frac{1-\text{لا}}{1+\text{لا}}}\,\text{فرلا} = \int \frac{1-\text{لا}}{\sqrt{1-\text{لا}^2}}\,\text{فرلا} = \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{1-\text{لا}^2}} - \int \frac{\text{لا}}{\sqrt{1-\text{لا}^2}}\,\text{فرلا}$

$= \text{جب}^{-1}\,\text{لا} + \sqrt{1-\text{لا}^2}$

۷۷ — **متغیر کی تبدیلی:-** تکمل کے دریافت کرنے میں دو ترکیبیں خاص طور پر مفید ثابت ہوئی ہیں ایک تو نئے متبوع متغیر کا انتخاب اور دوسرے تکمل بالحصص

فرض کرو کہ تکملہ $\text{ع} = \int \text{فہ}(\text{لا})\,\text{فرلا}$ .... (۱)

میں متغیر کو لا سے ت میں بدلنا ہے جہاں لا نئے متغیر ت کا دیا ہوا تفاعل ہے تو دفعہ ۳۲ سے

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \times \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{فہ}(\text{لا}) \times \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} \quad \ldots\ldots (۲)$$

اور اس لئے مقلوب علامت $\int$ کی تعریف سے

$$\text{ع} = \int \text{فہ}(\text{لا})\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\,\text{فرت}$$

۱۷۳ پس $\int \text{فہ}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \int \text{فہ}(\text{لا})\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\,\text{فرت}$ .... (۳)*

* [اس سے قاعدہ نکلتا ہے کہ علامت $\int$ کے بعد فرلا کی بجائے $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ فرت درج کردو]

اور برعکس اس کے جب کبھی دیا ہوا تکملہ شکل

$$\int \text{فہ}(\text{ع}) \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \text{فرلا} \qquad \text{(۴)}$$

کا ہو تو اسکی بجائے $\int \text{فہ}(\text{ع})\, \text{فرع} \qquad \text{(۵)}$

رکھ سکتے ہیں اور اکثر اسے دریافت کرنا آسان ہوتا ہے۔

ذیل کی صورتیں ضروری ہیں۔

(آ) $\int \text{فہ}(\text{لا}+\text{ا})\, \text{فرلا} = \int \text{فہ}(\text{ع})\, \text{فرع} \qquad \text{(۶)}$

جہاں $\text{ع} = \text{لا} + \text{ا}$

(ب) $\int \text{فہ}(\text{ک لا})\, \text{فرلا} = \frac{۱}{\text{ک}} \int \text{فہ}(\text{ع})\, \text{فرع} \qquad \text{(۷)}$

جہاں $\text{ع} = \text{ک لا}$۔ یہ دونوں نتیجے دفعہ ۴۷ میں استعمال میں آ چکے ہیں۔

(ج) $\int \text{فہ}(\text{لا}^۲)\, \text{لا فرلا} = \frac{۱}{۲} \int \text{فہ}(\text{ع})\, \text{فرع} \qquad \text{(۸)}$

جہاں $\text{ع} = \text{لا}^۲$

ذیل کے تکملے (۸) کی مثالیں ہیں۔

مثال (۱)۔ $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}(۱+\text{لا}^۲)} = \int \frac{\text{لا فرلا}}{\text{لا}^۲(۱+\text{لا}^۲)} = \int \frac{\text{فرع}}{\text{ع}(۱+\text{ع})}$

$$= \frac{۱}{۲} \int \left(\frac{۱}{\text{ع}} - \frac{۱}{۱+\text{ع}}\right) \text{فرع} = \frac{۱}{۲} \text{لوک} \frac{\text{ع}}{\text{ع}+۱} = \frac{۱}{۲} \text{لوک} \frac{\text{لا}^۲}{۱+\text{لا}^۲}$$

$$= \text{لوک} \frac{\text{لا}}{\sqrt{۱+\text{لا}^۲}}$$

مثال (۲)۔ $\int \frac{\text{لا فرلا}}{۱-\text{لا}^۴} = \frac{۱}{۲} \int \frac{\text{فرع}}{۱-\text{ع}^۲} = \frac{۱}{۴} \int \left(\frac{۱}{۱-\text{ع}} - \frac{۱}{۱+\text{ع}}\right) \text{فرع}$

$$= \frac{۱}{۴} \text{لوک} \frac{۱-\text{ع}}{۱+\text{ع}} = \frac{۱}{۴} \text{لوک} \frac{۱-\text{لا}^۲}{۱+\text{لا}^۲}$$

۱۷۴ مثال (۳)۔ $\int \frac{\text{لا فرلا}}{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۴}}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \int \frac{\text{فرع}}{\text{۱} + \text{ع}^{\text{۲}}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{مس}^{-\text{۱}}\,\text{ع} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{مس}^{-\text{۱}}\,\text{لا}^{\text{۲}}$

مثال (۴)۔ $\int \frac{\text{لا فرلا}}{\sqrt{\text{ر}^{\text{۴}} - \text{لا}^{\text{۴}}}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \int \frac{\text{فرع}}{\sqrt{\text{ر}^{\text{۴}} - \text{ع}^{\text{۲}}}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{جب}^{-\text{۱}}\,\frac{\text{ع}}{\text{ر}^{\text{۲}}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{جب}^{-\text{۱}}\,\frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{ر}^{\text{۲}}}$

طالب علم کچھ مشق کے بعد اس طرح کے آسان ابدال زبانی کر سکیگا۔

(۴) بعض اوقات جبریہ تفاعل کے تکمل کرنے میں ابدال $\text{لا} = \frac{\text{۱}}{\text{ت}}$ اور $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = -\frac{\text{۱}}{\text{ت}^{\text{۲}}}$ * سے سہولت پیدا ہوتی ہے۔

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{\text{ر}^{\text{۲}} + \text{لا}^{\text{۲}}}} = -\int \frac{\text{فرت}}{\text{ت}\sqrt{\text{ر}^{\text{۲}} + \text{ت}^{-\text{۲}}}} = -\frac{\text{۱}}{\text{ر}} \int \frac{\text{فرت}}{\sqrt{\text{ت}^{\text{۲}} + \text{ر}^{-\text{۲}}}}$$

$$= -\frac{\text{۱}}{\text{ر}}\,\text{جذ}^{-\text{۱}}\,\text{رت} = -\frac{\text{۱}}{\text{ر}}\,\text{جذ}^{-\text{۱}}\,\frac{\text{ر}}{\text{لا}} = \frac{\text{۱}}{\text{ر}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}}{\text{ر} + \sqrt{\text{ر}^{\text{۲}} + \text{لا}^{\text{۲}}}} \quad \ldots(\text{۹})$$

اسی طرح $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{\text{ر}^{\text{۲}} - \text{لا}^{\text{۲}}}} = -\frac{\text{۱}}{\text{ر}}\,\text{جمز}^{-\text{۱}}\,\frac{\text{ر}}{\text{ر}} = \frac{\text{۱}}{\text{ر}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}}{\text{ر} + \sqrt{\text{ر}^{\text{۲}} - \text{لا}^{\text{۲}}}} \quad \ldots(\text{۱۰})$

اور $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}} - \text{ر}^{\text{۲}}}} = -\frac{\text{۱}}{\text{ر}}\,\text{جب}^{-\text{۱}}\,\frac{\text{ر}}{\text{لا}} \quad \ldots\ldots\ldots(\text{۱۱})$

زیادہ عام طور پر تکملہ $\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا} + \text{ر})\sqrt{\text{ا}\,\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۲ب}\,\text{لا} + \text{ج}}} \quad \ldots\ldots\ldots(\text{۱۲})$

ابدال $\text{لا} + \text{ر} = \frac{\text{۱}}{\text{ت}}$ سے دفعہ ۶۷ میں غور کی ہوئی شکلوں میں سے کسی ایک میں تحویل ہو جاتا ہے۔

۱۷۵ نیز تبادلہ $\text{لا} = \frac{\text{۱}}{\text{ت}}$ سے

* [یہ ابدال $\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}$ کی بجائے $-\frac{\text{فرت}}{\text{ت}}$ لکھنے کے معادل ہے]

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{ا}^2+\text{لا}^2)^{3/2}} = -\int \frac{\text{فرت}}{\text{ت}^2(\text{ا}^2+\text{ت}^{-2})^{3/2}} = -\int \frac{\text{ت فرت}}{(1+\text{ا}^2\text{ت}^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{\text{ا}^2} \times \frac{1}{\sqrt{1+\text{ا}^2\text{ت}^2}} = \frac{1}{\text{ا}^2}\,\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{لا}^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۳)$$

اسی طرح $\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{ا}^2-\text{لا}^2)^{3/2}} = \frac{1}{\text{ا}^2}\,\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}}$ .... (۱۴)

اور $\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^2-\text{ا}^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\text{ا}^2}\,\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}^2}}$ .... (۱۵)

شکل $\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{ا لا}^2+\text{ب لا}+\text{ج})^{3/2}}$ .... (۱۶)

کو مربع کامل بنانے سے یہ مذکورہ بالا صورتوں میں سے کسی ایک صورت میں تبدیل ہو جاتی ہے۔

۴۸ ـ مثلثی تفاعلوں کا تکمل۔

(آ) $\int \text{ظس لا فرلا} = \int \frac{\text{جب لا}}{\text{جم لا}}\text{فرلا} = -\int \frac{\text{فر(جم لا)}}{\text{جم لا}} = -\text{لوک جم لا}$
$= \text{لوک قط لا}$ ...... (۱)

اسی طرح $\int \text{ظم لا فرلا} = \text{لوک جب لا}$ .... (۲)

اسی ترکیب سے $\int \frac{\text{جب لا}}{\text{جم}^2\text{لا}}\text{فرلا} = -\int \frac{\text{فر(جم لا)}}{\text{جم}^2\text{لا}} = \frac{1}{\text{جم لا}} = \text{قط لا}$ ... (۳)

اور $\int \frac{\text{جم لا}}{\text{جب}^2\text{لا}}\text{فرلا} = -\text{قم لا}$ .... (۴)

دفعہ ۳۱ (۳) دیکھو۔

(ب) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جب لا}} = \int \frac{\text{فرلا}}{۲\,\text{جب}\frac{\text{لا}}{۲}\text{جم}\frac{\text{لا}}{۲}} = \frac{1}{۲}\int \frac{\text{قط}^2\frac{\text{لا}}{۲}\,\text{فرلا}}{\text{ظس}\frac{\text{لا}}{۲}}$

$$= \int \frac{\text{فر}\left(\text{مس}\,\frac{\text{لا}}{۲}\right)}{\text{مس}\,\frac{\text{لا}}{۲}} = \text{لوک مس}\,\frac{\text{لا}}{۲} \;\ldots\ldots\ldots (۵)$$

اس سے ہم اخذ کرتے ہیں

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جم لا}} = \int \frac{\text{فرلا}}{\text{جب}\left(\frac{\pi}{۲}+\text{لا}\right)} = \text{لوک مس}\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{\text{لا}}{۲}\right) \ldots (۶)$$

ضوابط (۱) تا (۶) معیاری نتیجے شمار ہوتے ہیں اور انہیں حفظ کر لینا چاہیے۔

$$(۳) \quad \int \frac{\text{فرلا}}{\text{ا} + \text{ب جم لا}} = \int \frac{\text{فرلا}}{(\text{ا}+\text{ب})\,\text{جم}^۲\frac{\text{لا}}{۲} + (\text{ا}-\text{ب})\,\text{جب}^۲\frac{\text{لا}}{۲}}$$

$$= \int \frac{\text{قط}^۲\frac{\text{لا}}{۲}\;\text{فرلا}}{(\text{ا}+\text{ب}) + (\text{ا}-\text{ب})\,\text{مس}^۲\frac{\text{لا}}{۲}} \ldots\ldots\ldots (۷)$$

اب اسمیں اگر $\text{مس}\,\frac{\text{لا}}{۲} = \text{ع}$ رکھیں تو

$$= ۲\int \frac{\text{فرع}}{(\text{ا}+\text{ب}) + (\text{ا}-\text{ب})\,\text{ع}^۲} \ldots\ldots\ldots (۸)$$

اور یہ دفعہ ۳۰ کی معیاری شکلوں (آ)، (پ)، (ف) میں سے کسی ایک کے تحت آتا ہے۔

اسی طرح اسی ابدال سے

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ا} + \text{ب جب لا}} = ۲\int \frac{\text{فرع}}{\text{ا} + ۲\text{ب ع} + \text{ا ع}^۲} \ldots (۹)$$

$$(۴) \quad \int \frac{\text{فرلا}}{\text{ا}^۲\,\text{جم}^۲\,\text{لا} + \text{ب}^۲\,\text{جب}^۲\,\text{لا}} = \int \frac{\text{قط}^۲\,\text{لا}\;\text{فرلا}}{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲\,\text{مس}^۲\,\text{لا}} \ldots\ldots (۱۰)$$

اور اسمیں $\text{مس لا} = \text{ع}$ رکھنے سے

$$= \int \frac{\text{فرع}}{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲\,\text{ع}^۲} = \frac{۱}{\text{ب}}\int \frac{\text{فر}(\text{ب ع})}{\text{ا}^۲ + (\text{ب ع})^۲} = \frac{۱}{\text{اب}}\,\text{مس}^{-۱}\frac{\text{ب ع}}{\text{ا}}$$

$$= \frac{۱}{\text{اب}}\,\text{مس}^{-۱}\left(\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{مس لا}\right) \ldots\ldots (۱۱)$$

زائدی تفاعلوں والے متشابہ نتیجے یہاں درج کیے جاتے ہیں۔

∫ مسنر لا فرلا = لوک جمنر لا ، ∫ ہمنر لا فرلا = لوک جبنر لا ۔۔۔۔۔ (۱۲)

∫ (جبنر لا / ہمنر² لا) فرلا = − قطنر لا ، ∫ (جمنر لا / جبنر² لا) فرلا = − قمنر لا ۔۔۔۔ (۱۳)

∫ فرلا / جبنر لا = لوک مسنر (لا / ۲) ۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ (۱۴) ۱۷۷

∫ فرلا / جمنر لا = ۲ ∫ (قوٰ^لا فرلا) / (قوٰ^۲لا + ۱) = ۲ مسں^-۱ قوٰ^لا ۔۔۔۔۔۔۔ (۱۵)

اسی طرح شکلوں ∫ فرلا / (ا + ب جمنر لا) اور ∫ فرلا / (ا + ب جبنر لا) کا تکمل ابدال

مسنر (لا / ۲) = ع سے عمل میں آسکتا ہے۔

۷۹ – مثلثی ابدال – جبریہ تفاعلوں کا تکمل جنہیں دو درجی جملوں کا جذر شامل ہوتا ہے اکثر اوقات متبوع متغیر کی بجائے مثلثی یا زائدی تفاعل درج کرنے سے بآسانی حاصل ہو جاتا ہے۔

مثلاً √(ا² − لا²) کی موجودگی سے ابدال لا = ا جب طہ یا لا = ا مسنر ع ذہن میں آتا ہے،

نیز √(لا² − ا²) کی موجودگی سے ابدال لا = ا قط طہ یا لا = ا جمنر ع

اور √(لا² + ا²) کی موجودگی سے ابدال لا = ا مس طہ یا لا = ا جبنر ع کی طرف توجہ جاتی ہے۔

مثال (۱): تکملہ ∫ √(ا² − لا²) فرلا ۔۔۔۔۔۔۔۔۔ (۱) کو دریافت کرو۔

لا = ا جب طہ اور فرلا = ا جم طہ فرطہ رکھنے سے

$$\int \sqrt{ا^2 - لا^2}\ فرلا = ا^2 \int جم^2 طہ\ فرطہ = \frac{1}{2} ا^2 \int (1 + جم\ 2\ طہ)\ فرطہ$$

$$= \frac{1}{2} ا^2 (طہ + \frac{1}{2} جب\ 2\ طہ) = \frac{1}{2} ا^2 جب^{-1} \frac{لا}{ا} + \frac{1}{2} لا \sqrt{ا^2 - لا^2}$$

.... (۲)

مثال (۲) تکملہ $\int \frac{\sqrt{لا^2 + ا^2}}{لا^2}\ فرلا$ .... (۳) دریافت کرو۔

لا = ا جبز ع اور فرلا = ا جمز ع فرع درج کرنے سے

$$\int \frac{\sqrt{لا^2 + ا^2}}{لا^2}\ فرلا = \int ممز^2 ع\ فرع = \int (1 + قمز^2 ع)\ فرع$$

$$= ع - ممز\ ع = جبز^{-1} \frac{لا}{ا} - \frac{\sqrt{لا^2 + ا^2}}{لا} \quad ....(۴)$$

۱۶۸ مثال (۳)۔ $\int \frac{فرلا}{(1 - لا)\sqrt{1 - لا^2}}$ کو دریافت کرو۔

اگر لا = جم طہ اور فرلا = − جب طہ فرطہ اس میں درج کریں تو

$$تکملہ = - \int \frac{فرطہ}{1 - جم\ طہ} = - \frac{1}{2} \int \frac{فرطہ}{جب^2 (\frac{1}{2} طہ)} = مم (\frac{1}{2} طہ) = \sqrt{\frac{1 + لا}{1 - لا}}$$

۸۰ — **تکمل بالحصص** — دفعہ ۷۷ میں جس طریقہ کا ذکر کیا گیا ہے یعنی "تکمل بالحصص" وہ دفعہ ۳۰ کے ضابطہ

$$\frac{فر}{فرلا}(ع\ و) = ع \frac{فرو}{فرلا} + و \frac{فرع}{فرلا} \quad .... (۱)$$

کو الٹانے سے حاصل ہوتا ہے۔ طرفین کو تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ع\ و = \int ع \frac{فرو}{فرلا}\ فرلا + \int و \frac{فرع}{فرلا}\ فرلا$$

جس سے $\int \text{ع} \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} \text{فرلا} = \text{ع و} - \int \text{و} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \text{فرلا}$ .... (۲)×

اس سے ذیل کا قاعدہ معلوم ہوتا ہے۔

اگر تکمل شدنی جملہ دو اجزاء کا حاصل ضرب ہو جسمیں سے ایک $\left(\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}\right)$ فوراً تکمل ہو سکے تو اسے یہ فرض کرکے تکمل کیا جا سکتا ہے کہ دوسرا جزو (ع) مستقل ہے بشرطیکہ تکمل شدہ جزو (و) اور دوسرے جزو کے مشتق $\left(\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}\right)$ کے حاصل ضرب کے تکملہ کو اس میں سے گھٹا دیا جائے۔

(۲) میں و = لا رکھنے سے ایک بہت مفید خاص شکل حاصل ہوتی ہے یعنی

$$\int \text{ع فرلا} = \text{لا ع} - \int \text{لا} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \text{فرلا} \quad \text{....... (۳)}$$

اس قاعدہ کے استعمال کی چند اہم مثالیں ذیل میں درج ہیں

(۱) $\int \text{لوگ لا فرلا} = \text{لا لوگ لا} - \int \text{لا} \times \frac{1}{\text{لا}} \text{فرلا}$

$$= \text{لا لوگ لا} - \text{لا} \quad \text{......... (۴)}$$

(۲) $\int \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}\ \text{فرلا}$ دریافت کرو۔

نتیجہ (۳) میں $\text{ع} = \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}$ رکھنے سے

$$\int \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}\ \text{فرلا} = \text{لا}\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2} + \int \frac{\text{لا}^2\ \text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}} \quad \text{....... (۵)}$$

× اگر ہم $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ کی بجائے و لکھیں یعنی و کی بجائے $\text{عف}^{-1}\text{و}$ تو اسکی شکل ہو جاتی ہے

$\text{عف}^{-1}(\text{ع و}) - \text{ع عف}^{-1}\text{و} - \text{عف}^{-1}(\text{عف ع} \times \text{عف}^{-1}\text{و})$

لیکن $\int \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}\,\text{فرلا} = \int \frac{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}}\,\text{فرلا} = \text{ا}^2 \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}} - \int \frac{\text{لا}^2\,\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}}$

$$= \text{ا}^2\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} - \int \frac{\text{لا}^2\,\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}} \quad \ldots\ldots(۶)$$

(۶) اور (۵) کے حاصل جمع کو ۲ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\int \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}\,\text{فرلا} = \frac{1}{2}\,\text{لا}\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2} + \frac{1}{2}\,\text{ا}^2\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} \quad \ldots\ldots(۷)$$

دفعہ ۷۹ مثال (۱) کے ساتھ مقابلہ کرو۔

بالکل اسی طریقہ سے ہمیں حاصل ہونا چاہئے

$$\int \sqrt{\text{ا}^2 + \text{لا}^2}\,\text{فرلا} = \frac{1}{2}\,\text{لا}\sqrt{\text{ا}^2 + \text{لا}^2} + \frac{1}{2}\,\text{ا}^2\,\text{جبز}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} \quad \ldots(۸)$$

اور $\int \sqrt{\text{لا}^2 - \text{ا}^2}\,\text{فرلا} = \frac{1}{2}\,\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2 - \text{ا}^2} - \frac{1}{2}\,\text{ا}^2\,\text{جمز}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} \quad \ldots(۹)$

(۳) تکملوں $\text{پ} = \int \text{فو}^{\text{عالا}}\,\text{جم بہ لا}\,\text{فرلا}$ اور $\text{ق} = \int \text{فو}^{\text{عالا}}\,\text{جب بہ لا}\,\text{فرلا} \ldots(۱۰)$

کی قیمتیں دریافت کرنا۔

(۲) میں $\text{ع} = \text{جم بہ لا}$ اور $\text{و} = \frac{1}{\text{عا}}\,\text{فو}^{\text{عالا}}$ رکھنے سے

$$\text{پ} = \frac{1}{\text{عا}}\,\text{فو}^{\text{عالا}}\,\text{جم بہ لا} - \int \frac{1}{\text{عا}}\,\text{فو}^{\text{عالا}}(-\text{بہ جب بہ لا})\,\text{فرلا}$$

$$= \frac{1}{\text{عا}}\,\text{فو}^{\text{عالا}}\,\text{جم بہ لا} + \frac{\text{بہ}}{\text{عا}}\,\text{ق} \quad \ldots(۱۱)$$

اسی طرح $\text{ق} = \frac{1}{\text{عا}}\,\text{فو}^{\text{عالا}}\,\text{جب بہ لا} - \int \frac{1}{\text{عا}}\,\text{فو}^{\text{عالا}}\,\text{بہ جم بہ لا}\,\text{فرلا}$

$$= \frac{1}{\text{عا}}\,\text{فو}^{\text{عالا}}\,\text{جب بہ لا} - \frac{\text{بہ}}{\text{عا}}\,\text{پ} \quad \ldots(۱۲)$$

۱۸۰ پس $\left.\begin{aligned} \text{عا پ} - \text{بہ ق} &= \text{فو}^{\text{عالا}}\,\text{جم بہ لا} \\ \text{بہ پ} + \text{عا ق} &= \text{فو}^{\text{عالا}}\,\text{جب بہ لا} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots(۱۳)$

اور اس لئے
$$\int \text{فو}^{\text{عہ لا}}\,\text{جم بہ لا فرلا} = \frac{\text{بہ جب بہ لا} + \text{عہ جم بہ لا}}{\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2} \times \text{فو}^{\text{عہ لا}}$$
$$\int \text{فو}^{\text{عہ لا}}\,\text{جب بہ لا فرلا} = \frac{\text{عہ جب بہ لا} - \text{بہ جم بہ لا}}{\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2} \times \text{فو}^{\text{عہ لا}} \qquad (۱۴)$$

۸۱ — متواتر تحویل سے تکمل :- بعض اوقات تکمل بالحصص یا کسی اور طریقہ سے ایک تکملہ کا حاصل دوسرے آسان تکملے کے حل پر منحصر کیا جا سکتا ہے۔

(۱) فرض کرو کہ $\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{فو}^{\text{عہ لا}}\,\text{فرلا}$ ....(۱)

تو $\text{ع}_{\text{ن}} = \frac{1}{\text{عہ}}\text{فو}^{\text{عہ لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}} - \int \frac{1}{\text{عہ}}\text{فو}^{\text{عہ لا}} \times \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{فرلا}$

$= \frac{1}{\text{عہ}}\text{فو}^{\text{عہ لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}} - \frac{\text{ن}}{\text{عہ}}\,\text{ع}_{\text{ن}-1}$ ....(۲)

اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو اس ضابطہ کے مسلسل استعمال سے $\text{ع}_{\text{ن}}$ تکملہ $\text{ع}_{.}$ کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے

جہاں $\text{ع}_{.} = \int \text{فو}^{\text{عہ لا}}\,\text{فرلا} = \frac{1}{\text{عہ}}\text{فو}^{\text{عہ لا}}$ ....(۳)

مثال (۱) اگر $\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{فو}^{-\text{لا}}\,\text{فرلا}$ ....(۴)

تو $\text{ع}_{\text{ن}} = -\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{فو}^{-\text{لا}} + \text{ن}\,\text{ع}_{\text{ن}-1}$ ....(۵)

مثلاً $\text{ع}_3 = -\text{لا}^3\,\text{فو}^{-\text{لا}} + 3\,\text{ع}_2 = -\text{لا}^3\,\text{فو}^{-\text{لا}} + 3(-\text{لا}^2\,\text{فو}^{-\text{لا}} + 2\,\text{ع}_1)$

$= -\text{لا}^3\,\text{فو}^{-\text{لا}} - 3\,\text{لا}^2\,\text{فو}^{-\text{لا}} + 6(-\text{لا}\,\text{فو}^{-\text{لا}} + \text{ع}_{.})$

یعنی $\int \text{لا}^3\,\text{فو}^{-\text{لا}}\,\text{فرلا} = -(\text{لا}^3 + 3\,\text{لا}^2 + 6\,\text{لا} + 6)\,\text{فو}^{-\text{لا}}$

(۲) فرض کرو کہ $\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جم بہ لا فرلا}$
اور $\text{غ}_{\text{ن}} = \int \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جب بہ لا فرلا}$ ....(۶)

$$\text{تو}\quad ع_{ن} = \frac{۱}{به}\,\text{جب به لا} \times لا^{ن} - \int \frac{۱}{به}\,\text{جب به لا} \times ن\, لا^{ن-۱}\, ذ لا$$

$$= \frac{۱}{به}\,\text{جب به لا} \times لا^{ن} - \frac{ن}{به}\, و_{ن-۱} \quad \ldots\ldots\ldots (۷)$$

$$\text{اور}\quad و_{ن} = -\frac{۱}{به}\,\text{جم به لا} \times لا^{ن} - \int \left(-\frac{۱}{به}\,\text{جم به لا}\right) ن\, لا^{ن-۱}\, ذ لا$$

$$= -\frac{۱}{به}\,\text{جم به لا} \times لا^{ن} + \frac{ن}{به}\, ع_{ن-۱} \quad \ldots\ldots (۸)$$

۱۸۱ اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے تو ان ضابطوں کی مدد سے $ع_{ن}$ اور $و_{ن}$ معلوم تکملوں $ع_{۰}$ یا $و_{۰}$ کے رقوم میں ظاہر ہو سکتے ہیں۔

مثال (۱):- پس اگر به = ۱ تو

$$ع_{ن} = لا^{ن}\,\text{جب لا} - ن\, و_{ن-۱} \quad \text{اور} \quad و_{ن} = -لا^{ن}\,\text{جم لا} + ن\, ع_{ن-۱} \quad \ldots\ldots (۹)$$

$$\text{مثلاً}\quad ع_{۳} = لا^{۳}\,\text{جب لا} - ۳\, و_{۲} = لا^{۳}\,\text{جب لا} - ۳\left(-لا^{۲}\,\text{جم لا} + ۲\, ع_{۱}\right)$$

$$= لا^{۳}\,\text{جب لا} + ۳\, لا^{۲}\,\text{جم لا} - ۶\left(لا\,\text{جب لا} - و_{۰}\right)$$

$$\text{یعنی}\quad \int لا^{۳}\,\text{جم لا}\, ذ لا = \left(لا^{۳} - ۶\, لا\right)\text{جب لا} + \left(۳\, لا^{۲} - ۶\right)\text{جم لا}$$

$$(۳)\quad \text{اگر}\quad ع_{ن} = \int مس^{ن}\, طہ\, ذ طہ \quad \ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

$$= \int مس^{ن-۲}\, طہ \left(قط^{۲}\, طہ - ۱\right) ذ طہ$$

$$= \int مس^{ن-۲}\, طہ\, ذ(مس\, طہ) - \int مس^{ن-۲}\, طہ\, ذ طہ$$

$$\text{تو}\quad ع_{ن} = \frac{۱}{ن-۱}\, مس^{ن-۱}\, طہ - ع_{ن-۲} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۱)$$

پس اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو $ع_{ن}$ کی قیمت ن کے طاق یا جفت ہونے پر بالترتیب

$$ع_{۱} = \int مس\, طہ\, ذ طہ = \text{لوگ}\ قط\, طہ \quad \ldots\ldots (۱۲)$$

$$\text{یا}\quad ع_{۰} = \int ذ طہ = طہ \quad \ldots\ldots\ldots (۱۳)$$

پر منحصر ہوگی۔

اسی طرح اگر $و_ن = \int مم^ن طہ \, فطہ$ ......(۱۴)

تو ثابت ہو سکتا ہے کہ $و_ن = -\frac{1}{ن-1} مم^{ن-1} طہ - و_{ن-2}$ ......(۱۵)

۴ - تحویلی ضابطے (مسلسل)۔

(آ) فرض کرو کہ $ع_ن = \int جم^ن طہ \, فطہ$

تو $ع_ن = \int جم^{ن-1} طہ \, ف(جب طہ) = جب طہ \, جم^{ن-1} طہ$

$$- \int جب طہ \times (ن-1) جم^{ن-2} طہ \times (-جب طہ) \, فطہ$$

$$= جب طہ \, جم^{ن-1} طہ + (ن-1) \int (1 - جم^2 طہ) جم^{ن-2} طہ \, فطہ$$

$$= جب طہ \, جم^{ن-1} طہ + (ن-1)(ع_{ن-2} - ع_ن)$$

دوسری طرف لیجا کر ن پر تقسیم کرنے سے

$ع_ن = \frac{1}{ن} جب طہ \, جم^{ن-1} طہ + \frac{ن-1}{ن} ع_{ن-2}$ ......(۲)

اس ضابطہ کو متواتر استعمال کرنے سے ہر قدم پر قوت بقدر ۲ کے کم ہو جاتی ہے، اور آخر الامر اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو تکملہ $ع_ن$ کی قیمت یا تو

$ع_1 = \int جم طہ \, فطہ = جب طہ$ ......(۳)

یا $ع_0 = \int فطہ = طہ$ ......(۴) پر

منحصر کیجا سکتی ہے بوجب اسکے کہ ن طاق یا جفت ہو۔

(ب) اسی طریقہ پر اگر $و_ن = \int جب^ن طہ \, فطہ$ ......(۵)

تو $و_ن = -\frac{1}{ن} جم طہ \, جب^{ن-1} طہ + \frac{ن-1}{ن} و_{ن-2}$ ......(۶)

پس اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو $و_ن$ کی قیمت

$$\text{و}_1 = \int \text{جب طہ فر طہ} = -\text{جم طہ} \quad \ldots\ldots\ldots (۷)$$

یا

$$\text{و}_\text{م} \int \text{فر طہ} = \text{طہ} \quad \ldots\ldots\ldots (۸)$$

پر لاکے منحصر کی جاسکتی ہے۔

(۳) یہی طریقہ عام تر شکل

$$\text{ع}_{\text{م،ن}} = \int \text{جب}^{\text{م}}\text{طہ جم}^{\text{ن}}\text{طہ فر طہ} \quad \ldots\ldots (۹)$$

کے لئے استعمال ہو سکتا ہے۔

اب

$$\text{ع}_{\text{م،ن}} = \int \text{جب}^{\text{م}}\text{طہ جم}^{\text{ن}-1}\text{طہ فر(جب طہ)}$$

$$= \frac{1}{\text{م}+1}\text{جب}^{\text{م}+1}\text{طہ جم}^{\text{ن}-1}\text{طہ} - \frac{1}{\text{م}+1}\int \text{جب}^{\text{م}+1}\text{طہ} \times (\text{ن}-1)\text{جم}^{\text{ن}-2}\text{طہ} \times (-\text{جب طہ})\text{فر طہ}$$

$$= \frac{1}{\text{م}+1}\text{جب}^{\text{م}+1}\text{طہ جم}^{\text{ن}-1}\text{طہ} + \frac{(\text{ن}-1)}{(\text{م}+1)}\int \text{جب}^{\text{م}}\text{طہ جم}^{\text{ن}-2}\text{طہ}(1-\text{جم}^2\text{طہ})\text{فر طہ}$$

$$= \frac{1}{\text{م}+1}\text{جب}^{\text{م}+1}\text{طہ جم}^{\text{ن}-1}\text{طہ} + \frac{\text{ن}-1}{\text{م}+1}(\text{ع}_{\text{م،ن}-2} - \text{ع}_{\text{م،ن}})$$

کسر دور کرنے اور یک جنس رقموں کو اکٹھا کرکے (م + ن) سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ع}_{\text{م،ن}} = \frac{1}{\text{م}+\text{ن}}\text{جب}^{\text{م}+1}\text{طہ جم}^{\text{ن}-1}\text{طہ} + \frac{\text{ن}-1}{\text{م}+\text{ن}}\text{ع}_{\text{م،ن}-2} \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

اسی طریقہ سے حاصل ہوگا

$$\text{ع}_{\text{م،ن}} = -\frac{1}{\text{م}+\text{ن}}\text{جب}^{\text{م}-1}\text{طہ جم}^{\text{ن}+1}\text{طہ} + \frac{\text{م}-1}{\text{م}+\text{ن}}\text{ع}_{\text{م}-2\text{،ن}} \quad \ldots\ldots (۱۱)$$

ضابطوں (۱۰) اور (۱۱) کے متواتر استعمال سے ہر قدم پر کوئی قوت تا بقدر ۲ کے ۱۸۹۳
گھٹایا جاسکتا ہے اور بالآخر اگر م اور ن مثبت صحیح عدد ہوں تو تکملہ ع م،ن کی قیمت ذیل کے چار تکملات میں سے کسی ایک پر منحصر کیجا سکتی ہے۔

$$\text{ع}_{1،1} = \int \text{جب طہ جم طہ فر طہ} = \tfrac{1}{2}\text{جب}^2\text{طہ} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۲)$$

ع،، = ا فرطہ = طہ .... (۱۳)

ع،۱ = ا جم طہ فرطہ = جب طہ .... (۱۴)

ع،۱ = ا جب طہ فرطہ = - جم طہ .... (۱۵)

اِن دفعات کی تحقیقات کی بڑی اہمیت یہ ہے کہ انکی مدد سے تحدود تکملات میں سے چند سادہ اور عملی طور پر نہایت مفید ضابطے حاصل ہو سکتے ہیں۔ دیکھو دفعہ ۹۷

۸۳ - **منطق کسروں کا تکمل**، جبری تفاعلوں کے تکمل پر اب پھر غور کیا جائیگا اِن تفاعلوں کی چند ایسی قسمیں ہیں جن پر عام طریقے عائد ہو سکتے ہیں۔ سب سے پہلے ہم منطق تفاعلوں پر غور کرینگے۔

منطق کسر $\frac{\text{فا(لا)}}{\text{ف(لا)}}$ .... (۱) کسر واجب کہلاتی ہے

بشرطیکہ شمار کنندہ کے ابعاد نسب نما کے ابعاد سے کم ہوں۔ کوئی منطق کسر جس میں یہ شرط پوری نہ ہو تقسیم کے عمل سے منطق صحیح تفاعل اور کسر واجب کے حاصل جمع میں تحویل ہو سکتی ہے۔ اِس لئے صرف کسر واجب کے تکمل پر غور کرنا کافی ہوگا۔

پس اگر ف(لا)، ن ویں درجے کا کثیر الارقام ہو تو فرض کرو کہ

ف(لا) = لا^ن + پ۱ لا^(ن-۱) + پ۲ لا^(ن-۲) + ... + پ(ن-۱) لا + پن ...... (۲)

یہ مان لیا جائیگا کہ فا(لا) کا درجہ زیادہ سے زیادہ (ن-۱) ہے۔ تکمل کو آسان کرنے کے لئے ہم (۱) کو جزوی کسور کے حاصل جمع میں تحویل کرتے ہیں اس تحویل کا امکان جبر و مقابلہ کے چند عام مسائل پر منحصر ہے جس کے ثبوت کے لئے اس مضمون کی خاص کتابیں دیکھنا چاہئیں*۔

لیکن طالب علم کو یہ معلوم ہو جائیگا کہ اُن سادہ صورتوں کے لئے جو زیادہ تر استعمال میں آتی ہیں

* [مکمل نظریہ کے لئے کرسٹل کا جبر و مقابلہ باب آٹھ دیکھو]

جبر و مقابلہ کے اس اصولی نظریہ پر حاوی ہونے کی ضرورت نہیں ہے کیونکہ جو قاعدے اب دئے جائینگے ان سے حاصل کردہ نتیجوں کی تصدیق تجربہ سے بہ آسانی ہو سکتی ہے

۱۸۴ اول یہ فرض کرو کہ مساوات ف (لا) = ۰ .... (۳)

کی تمام اصلیں حقیقی اور جداگانہ ہیں اور یہ عہ$_{1}$، عہ$_{2}$، عہ$_{3}$ ..... عہ$_{ن}$ ہیں۔ تب کثیر الارقام ف (لا) درجۂ اول کے ن جداگانہ اجزائے ضربی میں تحویل ہو جاتا ہے یعنی

ف (لا) ≡ (لا − عہ$_{1}$) (لا − عہ$_{2}$) ... (لا − عہ$_{ن}$) .... (۴)

اب یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ اس صورت میں کسر (۱)، ن جزوی کسروں کے مجموعہ میں تحویل ہو جاتی ہے جن کے نسب نما ف (لا) کے مختلف اجزائے ضربی ہیں چنانچہ

فا (لا) / ((لا − عہ$_{1}$) (لا − عہ$_{2}$) .... (لا − عہ$_{ن}$)) = ا$_{1}$ / (لا − عہ$_{1}$) + ا$_{2}$ / (لا − عہ$_{2}$)

\+ ا$_{3}$ / (لا − عہ$_{3}$) + ... + ا$_{ن}$ / (لا − عہ$_{ن}$) ، ... (۵)

جسمیں ا$_{1}$، ا$_{2}$، ا$_{3}$ .... ا$_{ن}$ مستقل ہیں۔ اب اگر (۵) کو کسروں سے صاف کیا جائے اور دونوں طرف لا$^{ن-1}$، لا$^{ن-2}$ .... لا، لا^{0} کے سر مساوی رکھے جائیں تو ن مستقل مقداروں کو دریافت کرنیکے لئے ٹھیک ن مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔ لیکن ابھی یہ ثابت نہیں ہوا کہ زیر بحث شرائط ایک دوسرے سے آزاد اور باہم موافق ہیں، اور ا$_{1}$، ا$_{2}$، ..... ا$_{ن}$ کی ایسی قیمتیں دریافت ہو سکتی ہیں جو (۵) کو پورا کریں اور نیز یہ مستقل وحید القیمت ہوں۔ تاہم دونوں منطق صحیح تفاعل جنہیں متماثلاً مساوی ثابت کرنا ہے بالترتیب لا = عہ$_{1}$، لا = عہ$_{2}$ ..... لا = عہ$_{ن}$ کے لئے مساوی ہونگے بشرطیکہ

ا$_{1}$ (عہ$_{1}$ − عہ$_{2}$) (عہ$_{1}$ − عہ$_{3}$) .... (عہ$_{1}$ − عہ$_{ن}$) = فا (عہ$_{1}$)

ا$_{2}$ (عہ$_{2}$ − عہ$_{1}$) (عہ$_{2}$ − عہ$_{3}$) .... (عہ$_{2}$ − عہ$_{ن}$) = فا (عہ$_{2}$)

.... (۶) ....*

ا$_{ن}$ (عہ$_{ن}$ − عہ$_{1}$) (عہ$_{ن}$ − عہ$_{2}$) .... (عہ$_{ن}$ − عہ$_{ن-1}$) = فا (عہ$_{ن}$)

[* یہ دفعہ ۷۵ (۸) کی توسیع ہے]

یعنی $ا_۱ = \frac{فا(ع_۱)}{ف'(ع_۱)}$ ، $ا_۲ = \frac{فا(ع_۲)}{ف'(ع_۲)}$ ، .... ، $ا_ن = \frac{فا(ع_ن)}{ف'(ع_ن)}$ ....(۷)

اب چونکہ (ن - ۱) درجہ کے دو منطق صحیح تفاعل لا کی (ن - ۱) سے زیادہ جداگانہ قیمتوں کے لئے مساوی نہیں ہو سکتے سوائے اُس صورت کے جبکہ وہ متماثلاً مساوی ہوں، اِس لئے ثابت ہوا کہ مستقلوں کی اِن قیمتوں کے لئے (۵) مساوات متماثلہ ہے - پس

$$\int \frac{فا(لا)}{ف(لا)} فلا = ا_۱ لوک(لا - ع_۱) + ا_۲ لوک(لا - ع_۲) + ... + ا_ن لوک(لا - ع_ن)$$ ....(۸)

مثال (۱) $\int \frac{لا^۵}{لا^۴ - ۵لا^۲ + ۴}$ ....(۹) کی قیمت دریافت کرو -

اب $\frac{لا^۵}{لا^۴ - ۵لا^۲ + ۴} = لا + \frac{۵لا^۳ - ۴لا}{لا^۴ - ۵لا^۲ + ۴}$

$$= لا + \frac{ا}{لا - ۱} + \frac{ب}{لا + ۱} + \frac{ج}{لا - ۲} + \frac{د}{لا + ۲}$$ .....(۱۰)

۱۸۵ اگر کسور صاف کی جائیں اور سروں کو مساوی رکھا جائے تو ا، ب، ج، د کو دریافت کرنے کے لئے چار خطی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں - لیکن اوپر کا طریقہ استعمال کرنا آسان تر ہے اگر فرض کی ہوئی متماثلہ کو (لا - ۱) سے ضرب دیا جائے اور پھر اِس میں لا = ۱ رکھ دیا جائے تو ا کی قیمت دریافت ہو جاتی ہے اور اسی طرح باقی سروں کے لئے -

پس $\frac{لا^۵}{لا^۴ - ۵لا^۲ + ۴} = لا - \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{لا - ۱} - \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{لا + ۱} + \frac{۸}{۳} \times \frac{۱}{لا - ۲} + \frac{۸}{۳} \times \frac{۱}{لا + ۲}$ .....(۱۱)

اِس نتیجہ کی بہ آسانی تصدیق ہو سکتی ہے -

اسلئے زیر بحث تکملہ $= \frac{۱}{۲} لا^۲ - \frac{۱}{۶} لوک(لا - ۱) - \frac{۱}{۶} لوک(لا + ۱) + \frac{۸}{۳} لوک(لا - ۲)$

$+ \frac{۸}{۳} لوک(لا + ۲)$ ....(۱۲)

مثال (۲):- $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2(1+\text{لا}^2)}$ .... (۱۳) کی قیمت دریافت کرو۔

$\frac{1}{\text{لا}^2(1+\text{لا}^2)}$ کو لا^2 کا تفاعل تصور کرکے

$$\frac{1}{\text{لا}^2(1+\text{لا}^2)} = \frac{1}{\text{لا}^2} - \frac{1}{1+\text{لا}^2} \quad \dots\dots\dots\dots (۱۴)$$

جس سے $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2(1+\text{لا}^2)} = \frac{1}{\text{لا}} - \text{مس}^{-1}\text{لا}$ .... (۱۵)

۸۴۔ مساوی اصلیں۔ اگر مساوات ف (لا) = ۰ کی اصلیں حقیقی ہوں لیکن تمام جداگانہ نہ ہوں تو ر رتبہ والی اصل ب_1 کے جواب میں ف (لا) کا ایک جزو $(\text{لا}-\text{ب}_1)^{\text{ر}}$ ہوگا۔

جبر و مقابلہ کے نظریہ میں جس کا اوپر ذکر ہوچکا ہے یہ ثابت کیا گیا ہے کہ اب دفعہ ۸۳ (۱) کے پھیلاؤ میں جزوی کسور کا متناظر سلسلہ یہ ہوگا

$$\frac{\text{ب}_1}{\text{لا}-\text{ب}_1} + \frac{\text{ب}_2}{(\text{لا}-\text{ب}_1)^2} + \frac{\text{ب}_3}{(\text{لا}-\text{ب}_1)^3} + \dots\dots + \frac{\text{ب}_{\text{ر}}}{(\text{لا}-\text{ب}_1)^{\text{ر}}} \quad \dots\dots (۱)$$

جس میں ب_1، ب_2، ... $\text{ب}_{\text{ر}}$ مستقل ہیں اور انکی قیمتیں سر دل کو مساوی رکھنے کے طریقے سے یا کسی دوسرے طریقہ سے دریافت ہوسکتی ہیں۔

جملہ (۱) کا نامحدود تکملہ ہے

$$\text{ب}_1 \,\text{لوگ}\,(\text{لا}-\text{ب}_1) - \frac{\text{ب}_2}{\text{لا}-\text{ب}_1} - \frac{1}{2}\times\frac{\text{ب}_3}{(\text{لا}-\text{ب}_1)^2} \dots\dots - \frac{1}{\text{ر}-1}\times\frac{\text{ب}_{\text{ر}}}{(\text{لا}-\text{ب}_1)^{\text{ر}-1}}$$

.... (۲)

مثال (۱):- $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2(1-\text{لا})}$ .... (۳) کی قیمت دریافت کرو۔

فرض کرو کہ $\frac{1}{\text{لا}^2(1-\text{لا})} = \frac{\text{ا}}{\text{لا}} + \frac{\text{ب}}{\text{لا}^2} + \frac{\text{ج}}{1-\text{لا}}$ .... (۴)

اگر طرفین کو (۱ − لا) سے ضرب دیں اور پھر لا = ۱ رکھ دیں تو حاصل ہوتا ہے ج = ۱ نیز لا² سے ضرب دیکر لا = ۰ رکھنے سے ب = ۱ دریافت ہوتا ہے۔ اب صرف ا کی قیمت کسی اور طریقہ سے دریافت کرنا باقی ہے۔ اگر مساوات (۴) کے دونوں ۱۸۶
جانب لا سے ضرب دیں اور لا ← ∞ کردیں تو حاصل ہوتا ہے ا − ج = ۰ یعنی ا = ۱ اس کے معادل طریقہ یہ ہے کہ کسر صاف کرنے کے بعد لا² کے سروں کو مساوی رکھا جائے۔ نیز لا کو کوئی خاص قیمت دے سکتے ہیں مثلاً لا = −۱ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا} + \text{ب} + \frac{۱}{۲}\text{ج} = \frac{۱}{۲}$$ ۔

اور پہلے نتیجوں کی رو سے ا = ۱ حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{پس} \quad \int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{۲}(۱-\text{لا})} = \int \left(\frac{۱}{\text{لا}} + \frac{۱}{\text{لا}^{۲}} + \frac{۱}{۱-\text{لا}}\right)\text{فرلا}$$

$$= \text{لوک لا} - \frac{۱}{\text{لا}} - \text{لوک}\,(۱-\text{لا}) \quad \text{......(۵)}$$

مثال (۲)۔ $\int \frac{۲\text{لا}+۱}{(\text{لا}+۲)(\text{لا}-۳)^{۲}}$ ......(۶) کی قیمت دریافت کرو۔

فرض کرو کہ

$$\frac{۲\text{لا}+۱}{(\text{لا}+۲)(\text{لا}-۳)^{۲}} = \frac{\text{ا}}{\text{لا}+۲} + \frac{\text{ب}}{\text{لا}-۳} + \frac{\text{ج}}{(\text{لا}-۳)^{۲}} \quad \text{......(۷)}$$

مستقلوں کے دریافت کرنے کے اجمالی طریقہ سے

$$\text{ا} = \frac{-۴+۱}{(-۲-۳)^{۲}} = \frac{۳}{۲۵} \quad ، \quad \text{ج} = \frac{۶+۱}{۲+۳} = \frac{۷}{۵}$$

نیز لا سے ضرب دیکر لا ← ∞ کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا} + \text{ب} = ۰ \quad \text{یعنی ب} = \frac{۳}{۲۵}$$

اور اسلئے تکملہ $= -\frac{۳}{۲۵}\,\text{لوک}\,(\text{لا}+۲) + \frac{۳}{۲۵}\,\text{لوک}\,(\text{لا}-۳) - \frac{۷}{۵(\text{لا}-۳)}$ ......(۸)

مثال (۳)۔ $\int \frac{\text{لا}^{۲}\,\text{فرلا}}{(\text{لا}^{۲}+۱)^{۲}}$ ......(۹) کی قیمت دریافت کرو۔

دفعہ ۷۷ (۳) کی یاددہانی کی جاتی ہے کہ $\frac{\text{لا}^2}{(\text{لا}^2+1)^2}$ کو لا^2 کا تفاعل مانکر محض معائنہ سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{لا}^2}{(\text{لا}^2+1)^2} = \frac{(\text{لا}^2+1)-1}{(\text{لا}^2+1)^2} = \frac{1}{\text{لا}^2+1} - \frac{1}{(\text{لا}^2+1)^2}$$

پس $\int \frac{\text{لا}^2\,\text{فرلا}}{(1+\text{لا}^2)^2} = \int \frac{\text{لا فرلا}}{\text{لا}^2+1} - \int \frac{\text{لا فرلا}}{(\text{لا}^2+1)^2} = \frac{1}{2}\,\text{لوک}\,(\text{لا}^2+1) + \frac{1}{2(\text{لا}^2+1)}$ .... (۱۰)

۸۵ — دو درجی اجزائے ضربی — مذکور بالا طریقے ہمیشہ استعمال ہو سکتے ہیں لیکن اگر ف (لا) = ۰ کی کچھ اصلیں خیالی ہوں تو اول تکملہ خیالی شکل میں حاصل ہوگا۔ اگر ہم خیالی جملوں پر غور کرنے سے بچنا چاہتے ہیں تو ذیل کے طریقے پر عمل کرنا چاہئے۔

۱۸۷ مساواتوں کے نظریہ سے ہمیں معلوم ہے کہ کثیر الارقام ف (لا) جسکے تمام سر حقیقی ہوں پہلے اور دوسرے درجے کے حقیقی اجزا میں تحویل ہو سکتا ہے۔ پس تفاعل

$$\frac{\text{فا}(\text{لا})}{\text{ف}(\text{لا})} \quad \text{..........} \quad (۱)$$

کو جزوی کسور میں تحویل کرنے کی ضمن میں ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

(ا) ہر خطی جزو لا − عا کے لئے جو تکرار نہیں پاتا کسر کی شکل ہے $\frac{\text{ا}}{\text{لا} - \text{عا}}$ .... (۲)

(ب) ہر خطی جزو لا − بہ کے لئے جو ر مرتبہ تکرار پاتا ہے ر کسور کا سلسلہ ذیل کی شکل کا ہے

$$\frac{\text{ب}_1}{\text{لا} - \text{بہ}} + \frac{\text{ب}_2}{(\text{لا} - \text{بہ})^2} + \text{......} + \frac{\text{ب}_\text{ر}}{(\text{لا} - \text{بہ})^\text{ر}} \quad \text{..........} \quad (۳)$$

(ج) ہر دو درجی جزو $\text{لا}^2 + \text{پ لا} + \text{ق}$ کے لئے جو تکرار نہیں پاتا کسر کی شکل ہے

$$\frac{\text{ج لا} + \text{د}}{\text{لا}^2 + \text{پ لا} + \text{ق}} \quad \text{..........} \quad (۴)$$

(د) اور ہر دو درجی جزو $لا^2 + پ لا + ق$ کیلئے جو ر مرتبہ تکرار پاتا ہے کسور کا سلسلہ ذیل کی شکل کا ہے

$$\frac{ج_1 لا + د_1}{لا^2 + پ لا + ق} + \frac{ج_2 لا + د_2}{(لا^2 + پ لا + ق)^2} + \dots\dots + \frac{ج_ر لا + د_ر}{(لا^2 + پ لا + ق)^ر} \quad \dots\dots(5)$$

یہ دیکھنا آسان ہے کہ اس طور پر مستقلات کی عین کافی تعداد حاصل ہوتی ہے تاکہ سروں کے باہم مساوی رکھنے کے طریقہ سے تفاعل (۱) کی جزوی کسور کے پورے نظام (۵) کے ساتھ مطابقت قائم ہوسکے۔

* اب صرف یہ غور کرنا باقی رہا ہے کہ جزوی کسر $\frac{ج_س لا + د_س}{(لا^2 + پ لا + ق)^س}$ ......(6)

کا نامحدود تکملہ کس طرح دریافت کیا جائے۔ س = ۱ کی صورت پر دفعہ ۱۰۷ میں غور کیا جا چکا ہے اور عام صورت ایک تحویلی ضابطہ کی مدد سے اس شکل میں تحویل کیجا سکتی ہے
سب سے پہلے ل۱ اور م۱ ایسے دریافت کئے جاسکتے ہیں کہ

$$\frac{ج_س لا + د_س}{(لا^2 + پ لا + ق)^س} = ل_1 \frac{2 لا + پ}{(لا^2 + پ لا + ق)^س} + \frac{م_1}{(لا^2 + پ لا + ف)^س} \quad \dots(7)$$

۱۰۸ یعنی $ل_1 = \frac{1}{2} ج_س$ اور $م_1 = د_س - \frac{1}{2} پ ج_س$ ....(8)

نتیجہ (۷) کے دائیں جانب کی پہلی رقم کا تکملہ ہے

$$-\frac{ل_1}{(س-1)} \times \frac{1}{(لا^2 + پ لا + ق)^{س-1}} \quad \dots\dots(9)$$

اور اب صرف ذیل کی قیمت معلوم کرنا باقی ہے

$$\int \frac{ف لا}{(لا^2 + پ لا + ق)^س} \quad \text{یا} \quad \int \frac{ف ت}{(ت^2 + ج^2)^س} \quad \dots\dots\dots(10)$$

[* ذیل کی بحث صرف مضمون کو مکمل کرنے کی غرض سے یہاں دی گئی ہے، عملی طور پر اسکے استعمال کی شاذ و نادر ضرورت پڑتی ہے۔ اس کو ملتوی رکھنے سے طالب علم کو کوئی نقصان نہیں ہوگا۔
(۱۰) تکملوں کے جملوں کو تکمل کرنے کا دوسرا طریقہ مثال (۲) میں آگے دیا گیا ہے]

جبکہ $\text{ت} = \text{لا} + \frac{۱}{۲}\text{پ}$ اور $\text{ج} = \text{ق} - \frac{۱}{۴}\text{پ}^{۲}$ ....(۱۱)

تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left\{\frac{\text{ت}}{(\text{ت}^{۲}+\text{ج})^{\text{س}-۱}}\right\} = \frac{۱}{(\text{ت}^{۲}+\text{ج})^{\text{س}-۱}} - (۲\text{س}-۲)\frac{\text{ت}^{۲}}{(\text{ت}^{۲}+\text{ج})^{\text{س}}}$$

$$= \frac{۱}{(\text{ت}^{۲}+\text{ج})^{\text{س}-۱}} - (۲\text{س}-۲)\times\frac{(\text{ت}^{۲}+\text{ج})-\text{ج}}{(\text{ت}^{۲}+\text{ج})^{\text{س}}}$$

$$= \frac{-(۲\text{س}-۳)}{(\text{ت}^{۲}+\text{ج})^{\text{س}-۱}} + (۲\text{س}-۲)\times\frac{\text{ج}}{(\text{ت}^{۲}+\text{ج})^{\text{س}}} \quad ......(۱۲)$$

پس تکمل کرنے سے

$$\frac{\text{ت}}{(\text{ت}^{۲}+\text{ج})^{\text{س}-۱}} = -(۲\text{س}-۳)\int\frac{\text{فت}}{(\text{ت}^{۲}+\text{ج})^{\text{س}-۱}} + (۲\text{س}-۲)\,\text{ج}\int\frac{\text{فت}}{(\text{ت}^{۲}+\text{ج})^{\text{س}}}$$

یعنی
$$\int\frac{\text{فت}}{(\text{ت}^{۲}+\text{ج})^{\text{س}}} = \frac{۱}{(۲\text{س}-۲)\,\text{ج}}\times\frac{\text{ت}}{(\text{ت}^{۲}+\text{ج})^{\text{س}-۱}} + \frac{(۲\text{س}-۳)}{(۲\text{س}-۲)\,\text{ج}}\int\frac{\text{فت}}{(\text{ت}^{۲}+\text{ج})^{\text{س}-۱}}$$
............(۱۳)

اس لئے پہلی ترقیم پر واپس آنے سے

$$\int\frac{\text{فلا}}{(\text{لا}^{۲}+\text{پ}\,\text{لا}+\text{ق})^{\text{س}}} = \frac{۱}{۲(\text{س}-۱)(\text{ق}-\frac{۱}{۴}\text{پ}^{۲})}\times\frac{\text{لا}+\frac{۱}{۲}\text{پ}}{(\text{لا}^{۲}+\text{پ}\,\text{لا}+\text{ق})^{\text{س}-۱}}$$
$$+\frac{(۲\text{س}-۳)}{۲(\text{س}-۱)(\text{ق}-\frac{۱}{۴}\text{پ}^{۲})}\int\frac{\text{فلا}}{(\text{لا}^{۲}+\text{پ}\,\text{لا}+\text{ق})^{\text{س}-۱}} \quad ....(۱۴)$$

اور یہی مطلوبہ تحویلی ضابطہ ہے۔ اس نتیجے کے متواتر استعمال سے تکملہ (۱۰) کی قیمت آخر میں

$$\int\frac{\text{فلا}}{\text{لا}^{۲}+\text{پ}\,\text{لا}+\text{ق}} \quad ....(۱۵)$$

پر لاکے منحصر کی جاسکتی ہے اور اس تکملہ (۱۵) کی قیمت دفعہ ۵، سے معلوم ہے۔

مثال (۱) $\int\frac{\text{فلا}}{(\text{لا}^{۲}+\text{لا}+۱)}$ ....(۱۶) کی قیمت دریافت کرو۔

نسب نما کے دو درجہ دوم کے اجزا $(\text{لا}^2+\text{لا}+1)$ اور $(\text{لا}^2-\text{لا}+1)$ ہیں اور اِن کی مزید تحلیل نہیں ہو سکتی۔

اس لئے اوپر کے قاعدہ کے مطابق ہم فرض کرتے ہیں کہ

$$\frac{1}{\text{لا}^4+\text{لا}^2+1}=\frac{\text{ا}\,\text{لا}+\text{ب}}{\text{لا}^2+\text{لا}+1}+\frac{\text{ج}\,\text{لا}+\text{د}}{\text{لا}^2-\text{لا}+1}\quad\ldots\ldots\ldots(17)$$

یعنی $1=(\text{ا}\,\text{لا}+\text{ب})(\text{لا}^2-\text{لا}+1)+(\text{ج}\,\text{لا}+\text{د})(\text{لا}^2+\text{لا}+1)$

لا کی مختلف قوتوں کے سر مساوی رکھنے سے ۱۸۹

$\text{ا}+\text{ج}=0\text{،}\quad -\text{ا}+\text{ج}+\text{ب}+\text{د}=0$

$\text{ا}-\text{ج}-\text{ب}+\text{د}=0$ اور $\text{ب}+\text{د}=1$

پس $\text{ا}=-\text{ج}=\frac{1}{2}$ اور $\text{ب}=\text{د}=\frac{1}{2}\quad\ldots\ldots\ldots(18)$

اب دفعہ ۵۷ کے طریقہ سے تکمل دریافت ہو سکتا ہے۔ چنانچہ

$$\int\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^4+\text{لا}^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{\text{لا}+1}{\text{لا}^2+\text{لا}+1}\,\text{فرلا}-\frac{1}{2}\int\frac{\text{لا}-1}{\text{لا}^2-\text{لا}+1}\,\text{فرلا}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{(2\text{لا}+1)+1}{\text{لا}^2+\text{لا}+1}\,\text{فرلا}-\frac{1}{4}\int\frac{(2\text{لا}-1)-1}{\text{لا}^2-\text{لا}+1}\,\text{فرلا}$$

$$=\frac{1}{4}\text{لوک}(\text{لا}^2+\text{لا}+1)-\frac{1}{4}\text{لوک}(\text{لا}^2-\text{لا}+1)+\frac{1}{4}\int\frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{4}\int\frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}\text{لوک}\frac{\text{لا}^2+\text{لا}+1}{\text{لا}^2-\text{لا}+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\text{مس}^{-1}\frac{2\text{لا}+1}{\sqrt{3}}+\text{مس}^{-1}\frac{2\text{لا}-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\text{لوک}\frac{\text{لا}^2+\text{لا}+1}{\text{لا}^2-\text{لا}+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\sqrt{3}\,\text{لا}}{1-\text{لا}^2}\quad\ldots\ldots\ldots(19)$$

مثال (۲) $\int\frac{\text{فرلا}}{(1+\text{لا}^2)^2}\quad\ldots\ldots\ldots(20)$ کی قیمت دریافت کرو۔

نتیجہ (۱۴) کے مطابق اسکی قیمت دریافت ہو سکتی ہے لیکن ذیل کا طریقہ زیادہ آسان ہے۔

اگر $\text{لا}=\text{مس}\ \text{طہ}$ رکھا جائے تو

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲}})^{\text{۲}}} = \int \text{جم}^{\text{۲}}\,\text{طہ فرطہ} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\int (\text{۱}+\text{جم ۲طہ})\,\text{فرطہ}$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{طہ} + \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\,\text{جب ۲طہ} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{مس}^{-\text{۱}}\,\text{لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \times \frac{\text{لا}}{\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲}}} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۲۱})$$

۸۶ — غیر منطق تفاعلوں کا تکمل :- اس بارے میں ذیل کے نتیجے اہم ہیں

(۱) جبریہ تفاعلوں کی صورت میں جنمیں متغیر کی کسری قوتوں کے سوائے اور کوئی غیر منطق مقدار نہیں ہے ہم

$$\text{لا} = \text{ت}^{\text{م}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{م ت}^{\text{م}-\text{۱}} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۱})$$

رکھ سکتے ہیں جہاں کسری قوت نماؤں کے نسب نما کا ذواضعاف اقل م ہے اور سوال اس طور پر ت کے منطق تفاعل کے تکمل میں بدل جاتا ہے۔

(۲) لا اور ی کا کوئی منطق تفاعل جہاں $\text{ی} = \sqrt{\text{ا} + \text{ب لا}} \quad \ldots\ldots (\text{۲})$

ابدال $\text{ا} + \text{ب لا} = \text{ت}^{\text{۲}}$ اور $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \frac{\text{۲ت}}{\text{ب}}$ ....(۳) کے ذریعہ تکمل ہوسکتا ہے۔

$$\text{پس} \int \text{فا}(\text{لا}\,،\,\text{ی})\,\text{فرلا} = \int \text{فا}\left(\frac{\text{ت}^{\text{۲}}-\text{ا}}{\text{ب}}\,،\,\text{ت}\right)\frac{\text{۲ت فرت}}{\text{ب}} \quad \ldots\ldots (\text{۴})$$

اور تکمل کی علامت کے اندر کا ت کا تفاعل منطق ہے۔

مثال (۱) $\int \frac{\text{لا فرلا}}{\sqrt{\text{لا}}+\text{۱}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

اگر $\text{لا} = \text{ت}^{\text{۲}}$ رکھیں تو

$$\int \frac{\text{لا فرلا}}{\text{۱}+\sqrt{\text{لا}}} = \text{۲}\int \frac{\text{ت}^{\text{۳}}\,\text{فرت}}{\text{ت}+\text{۱}} = \text{۲}\int(\text{ت}^{\text{۲}}-\text{ت}+\text{۱})\,\text{فرت} - \text{۲}\int\frac{\text{فرت}}{\text{ت}+\text{۱}}$$

$$= \frac{\text{۲}}{\text{۳}}\,\text{ت}^{\text{۳}} - \text{ت}^{\text{۲}} + \text{۲ت} - \text{۲ لوگ}(\text{ت}+\text{۱}) = \frac{\text{۲}}{\text{۳}}\,\text{لا}^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}} - \text{لا} + \text{۲}\sqrt{\text{لا}} - \text{۲ لوگ}(\text{۱}+\sqrt{\text{لا}})$$

مثال (۲) $\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{۲}+\text{لا})\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

$\text{۱}+\text{لا}=\text{ت}^{\text{۲}}$ اور $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}=\text{۲ت}$ رکھنے سے

$$\text{تکملہ}=\int\frac{\text{۲ت فرت}}{\text{ت}(\text{۱}+\text{ت}^{\text{۲}})}=\text{۲}\int\frac{\text{فرت}}{\text{۱}+\text{ت}^{\text{۲}}}=\text{۲ مس}^{-\text{۱}}\text{ت}=\text{۲ مس}^{-\text{۱}}\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}$$

(۳) اگر ی دو درجی جملے کے جذر کو ظاہر کرے تو فرض کرو کہ

$$\text{ی}=\sqrt{\text{ا لا}^{\text{۲}}+\text{ب لا}+\text{ج}}$$

اور فا(لا، ی) متغیرات لا اور ی کا منطق تفاعل ہے تو تکملہ $\int$ فا(لا، ی) فرلا کی قیمت دریافت کرنے کا سوال ذیل کے ابدال سے منطق تفاعل کے تکملہ میں تحویل ہو سکتا ہے۔

اگر ا مثبت ہے تو ہم لکھ سکتے ہیں $\text{ی}=\sqrt{\text{ا}}\times\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}}+\text{پ لا}+\text{ق}}$ ...(۶)

جس میں $\text{پ}=\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ اور $\text{ق}=\frac{\text{ج}}{\text{ا}}$ ۔ اب فرض کرو کہ

$$\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}}+\text{پ لا}+\text{ق}}=\text{ت}-\text{لا}$$

پس $\text{لا}=\frac{\text{ت}^{\text{۲}}-\text{ق}}{\text{۲ت}+\text{پ}}$ اور $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}=\frac{\text{۲}(\text{ت}^{\text{۲}}+\text{پ ت}+\text{ق})}{(\text{۲ت}+\text{پ})^{\text{۲}}}$ ......(۷)

اور $\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}}+\text{پ لا}+\text{ق}}=\frac{\text{ت}^{\text{۲}}+\text{پ ت}+\text{ق}}{\text{۲ت}+\text{پ}}$ ....(۸)

۱۹۱ اس ابدال سے ظاہر ہے کہ سوال ت کے منطق تفاعل کے تکمل میں تحویل ہو جاتا ہے۔

اگر $\text{لا}^{\text{۲}}+\text{پ لا}+\text{ق}$ کے اجزا حقیقی ہیں تو فرض کرو

$$\text{لا}^{\text{۲}}+\text{پ لا}+\text{ق}=(\text{لا}-\text{عہ})(\text{لا}-\text{بہ})\ ....(\text{۹})$$

تو ذیل کا ابدال بھی استعمال کر سکتے ہیں

$$\text{لا}-\text{بہ}=(\text{لا}-\text{عہ})\,\text{ت}^{\text{۲}}\ ....(\text{۱۰})$$

جس سے $\text{لا} = \text{عہ} + \frac{\text{بہ} - \text{عہ}}{\text{۱} - \text{ت}^{\text{۲}}}$ اور $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} = \frac{\text{۲(بہ - عہ)ت}}{(\text{۱} - \text{ت}^{\text{۲}})^{\text{۲}}}$ ....(۱۱)

اور $\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{پ لا} + \text{ق}}$

$= (\text{لا} - \text{عہ})\text{ت} = \frac{(\text{بہ} - \text{عہ})\text{ت}}{\text{۱} - \text{ت}^{\text{۲}}}$ ....(۱۲)

اگر ا منفی ہے تو ہم لکھہ سکتے ہیں

$\text{لا} = \sqrt{-\text{ا}} \times \sqrt{\text{ق} + \text{پ لا} - \text{لا}^{\text{۲}}}$ ....(۱۳)

جسمیں پ = $-\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ اور ق = $-\frac{\text{ج}}{\text{ا}}$، اگر جذر حقیقی ہے تو لازماً ق + پ لا - لا$^{\text{۲}}$ کے اجزاء ضربی حقیقی ہونے چاہئیں۔ ورنہ اسکی خلاف صورت میں لا کی تمام قیمتوں کے لئے اس جملہ کی علامت ایک ہی رہے گی اور ظاہر ہے کہ لا کی کافی طور پر بڑی قیمتوں کے لئے یہ جملہ منفی ہے اس لئے اسکی قیمت ہمیشہ منفی ہوگی۔

پس $\text{ق} + \text{پ لا} - \text{لا}^{\text{۲}} = (\text{لا} - \text{عہ})(\text{بہ} - \text{لا})$ ......(۱۴)

جس میں عہ اور بہ حقیقی ہیں۔ فرض کرو کہ

$\text{بہ} - \text{لا} = (\text{لا} - \text{عہ})\text{ت}^{\text{۲}}$ ....(۱۵)

تو $\text{لا} = \text{عہ} + \frac{\text{بہ} - \text{عہ}}{\text{۱} + \text{ت}^{\text{۲}}}$ اور $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} = -\frac{\text{۲(بہ - عہ)ت}}{(\text{۱} + \text{ت}^{\text{۲}})^{\text{۲}}}$ .....(۱۶)

اور $\sqrt{\text{ق} + \text{پ لا} - \text{لا}^{\text{۲}}} = (\text{لا} - \text{عہ})\text{ت} = \frac{(\text{بہ} - \text{عہ})\text{ت}}{\text{۱} + \text{ت}^{\text{۲}}}$ ....(۱۷)

اب ظاہر ہے کہ ان ابدالوں سے فا (لا، لا) $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}$، متغیر ت کا منطق تفاعل ہو جاتا ہے۔

اوپر کی تحقیقات ایک حد تک اہمیت رکھتی ہے کیونکہ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ خاص شکل کے تفاعل تکمل ہو سکتے ہیں، اور ان سے خاص قسم کے نتیجے حاصل ہوتے ہیں لیکن خاص خاص صورتوں میں عملی طور پر تکمل دیگر طریقوں سے آسانی سے عمل میں آسکتا ہے۔*

[* دفعہ ۷۶، ۷۷، اور ۷۹ کے طریقے خاص طور پر دیکھو]

اس باب کے دوران میں ایسی کئی مثالیں آچکی ہیں۔ اور نمونے کے طور پر ایک اور دو مثالیں یہاں دی جاتی ہیں۔

مثال (۳)۔ نسب نما کو ناطق بنانے سے

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۱+\text{لا}}+\sqrt{\text{لا}}} = \int \left\{\sqrt{۱+\text{لا}}-\sqrt{\text{لا}}\right\}\text{فرلا}$$

$$= \frac{۲}{۳}(۱+\text{لا})^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۲}{۳}\text{لا}^{\frac{۳}{۲}}$$

۱۹۲ مثال (۴)۔ $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^۲-۱}} = \int \left\{\text{لا}-\sqrt{\text{لا}^۲-۱}\right\}\text{فرلا}$

$$= \frac{۱}{۲}\text{لا}^۲ - \int \sqrt{\text{لا}^۲-۱}\,\text{فرلا}$$

$$= \frac{۱}{۲}\text{لا}^۲ - \frac{۱}{۲}\text{لا}\sqrt{\text{لا}^۲-۱} + \frac{۱}{۲}\text{جمز}^{-۱}\text{لا}$$

بطرز دیگر لا = جمز ع رکھنے سے تکملہ ذیل کی شکل اختیار کرتا ہے

$$\int \frac{\text{جبز ع فرع}}{\text{جمز ع}+\text{جبز ع}} = \int \text{قو}^{-\text{ع}}\,\text{جبز ع فرع}$$

$$= \frac{۱}{۲}\int (۱-\text{قو}^{-۲\text{ع}})\,\text{فرع} = \frac{۱}{۲}\text{ع} + \frac{۱}{۴}\text{قو}^{-۲\text{ع}}$$

اور آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ دونوں نتیجوں میں صرف مستقل کا فرق ہے۔

امثلہ ۲۳

ذیل کے جملوں کے نامحدود تکملات دریافت کرو اور تفرق کرکے انکی تصدیق کرو۔

(۱) $\frac{۱}{۱-\text{لا}}$ ، $\frac{۱}{(۱-\text{لا})^۲}$ (۲) $\frac{۱}{۱-۲\text{لا}}$ ، $\frac{۱}{(۱-۲\text{لا})^۲}$

(۳) $(\text{لا}-۱)^۲$ ، $\frac{۱}{(\text{لا}-۱)^۳}$ ، (۴) $\sqrt{\text{لا}}$ ، $\frac{۱}{\sqrt{\text{لا}}}$ ، $\frac{\text{لا}+۱}{\sqrt{\text{لا}}}$

(۵) $\frac{1}{\sqrt{2+\text{لا}}}$ ، $\frac{\ }{\sqrt{4-2\text{لا}}}$ (۶) $\frac{1+\text{لا}}{\text{لا}}$ ، $\frac{1+\text{لا}}{\text{لا}^2}$

(۷) $\frac{1-4\text{لا}}{3+\text{لا}}$ ، $\frac{2+\text{لا}}{3-\text{لا}}$ (۸) $\left(\text{لا}+\frac{1}{\text{لا}}\right)^2$ ، $\left(\text{لا}+\frac{1}{\text{لا}}\right)^3$

(۹) $\frac{1+\text{لا}}{1-\text{لا}}$ ، $\frac{1-\text{لا}}{1+\text{لا}}$ (۱۰) $\frac{\text{لا}^2}{1+\text{لا}}$ ، $\frac{\text{لا}^2}{1-\text{لا}}$

(۱۱) $\frac{1-\text{لا}^2}{1+\text{لا}^2}$ ، $\frac{1+\text{لا}^2}{1-\text{لا}^2}$ (۱۲) $\text{جم}^2\,\text{لا}$ ، $\text{ہم}^2\,\text{لا}$

(۱۳) $(\text{جم لا} - \text{جب لا})^2$ (۱۴) $\text{جمز}^2\,\text{لا}$ ، $\text{جبز}^2\,\text{لا}$

(۱۵) $\text{مسز}^2\,\text{لا}$ ، $\text{ہمز}^2\,\text{لا}$ (۱۶) $\frac{1-\text{لا}^{\text{م}}}{1-\text{لا}}$ ، $\frac{1+\text{لا}^{2\text{م}+1}}{1+\text{لا}}$

امثلہ ۲۴

حرکیاتی سوالات

(۱) ایک ذرہ قانون $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{ع} - \text{ج ت}$ کے مطابق حرکت کر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ ساکن ہونے سے پہلے وہ فاصلہ $\frac{\text{ع}^2}{2\text{ج}}$ طے کریگا۔ (ج اسراع بجاذبہ ارض)

(۲) اگر ایک نقطہ سکون سے وقت ت = ۰ پر مستقل اسراع کے ساتھ حرکت شروع ۱۹۳
کرے اور کسی وقفہ کے بعد اسکی رفتار و_1 ہو اور اس وقفہ کے اندر اوسط رفتار $\bar{\text{و}}$ ہو تو ثابت کرو کہ $\bar{\text{و}} = \frac{1}{2}\,\text{و}_1$

(۳) سوال (۲) کی ترمیم میں اگر اسراع $\text{ت}^{\text{ن}}$ کے متناسب ہو تو

$$\bar{\text{و}} = \frac{1}{\text{ن}+2} \times \text{و}_1$$

(۴) ایک ذرہ کی حرکت کا قانون $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{و جم ن ت}$ ہے۔ ثابت کرو کہ

ت = ۰ سے ساکن ہونے تک فاصلہ $\frac{\text{و}}{\text{ن}}$ طے ہوگا۔

(۵) اگر مزاحم واسطہ میں متحرک ذرہ کی رفتار $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{و} \cdot \text{قو}^{-\text{ک ت}}$ ہو تو ثابت کرو کہ ذرہ وقت ت = ۰ کے مقام سے فاصلہ $\frac{\text{و}}{\text{ک}}$ کبھی طے نہیں کر سکتا۔

(۶) ایک ذرہ قانون $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{و} \cdot \text{قو}^{-\text{ک ت}}$ جم ن ت کے مطابق حرکت کرتا ہے ثابت کرو کہ ت = ۰ سے ساکن ہونے تک ذرہ فاصلہ $\frac{\text{ن قو}^{-\text{ک}\frac{\pi}{\text{ن}}} + \text{ک}}{\text{ن}^2 + \text{ک}^2}$ و طے کرتا ہے۔

(۷) ثابت محور کے گرد گھومنے والے جسم کی زاوی رفتار $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} = ۲\,\text{ن قطز ن ت}$ ہے ثابت کرو کہ اگر طہ = ۰ بوقت ت = ۰ تو $\text{طہ} = ۴\,\text{مس}^{-۱}\,\text{قو}^{\text{ن ت}} - \pi$

امثلہ ۲۵

(درجہ دوم کے نسب نما)

(۱) $\int \frac{۱ + \text{لا}}{۱ + \text{لا}^۲}\,\text{فرلا} = \text{مس}^{-۱}\,\text{لا} + \text{لوگ}\sqrt{۱ + \text{لا}^۲}$

(۲) $\int \frac{\text{لا}^۳}{۱ + \text{لا}^۲}\,\text{فرلا} = \frac{۱}{۲}\text{لا}^۲ - \text{لوگ}\sqrt{۱ + \text{لا}^۲}$

۱۹۴ (۳) $\int \frac{\text{لا}^۳}{۱ - \text{لا}^۲}\,\text{فرلا} = -\frac{۱}{۲}\text{لا}^۲ - \text{لوگ}\sqrt{۱ - \text{لا}^۲}$

(۴) $\int \frac{\text{فرلا}}{۱ - ۲\text{لا} + ۲\text{لا}^۲} = \text{مس}^{-۱}(۲\text{لا} - ۱)$

(۵) $\int \frac{\text{فرلا}}{۱ + ۳\text{لا} + ۲\text{لا}^۲} = \text{لوگ}\,\frac{۲\text{لا} + ۱}{\text{لا} + ۱}$

(۶) $\int \frac{۳\text{لا} + ۷}{۲\text{لا}^۲ - ۳\text{لا} + ۵}\,\text{فرلا} = \frac{۳}{۴}\,\text{لوک}\,(۲\text{لا}^۲ - ۳\text{لا} + ۵) + \frac{۳۷}{۲\sqrt{۳۱}}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{۴\text{لا} - ۳}{\sqrt{۳۱}}$

(۷) $\int \frac{۲\text{لا} - ۱}{\text{لا}^۲ + ۲\text{لا} + ۳}\,\text{فرلا} = \text{لوک}\,(\text{لا}^۲ + ۲\text{لا} + ۳) - \frac{۳}{\sqrt{۲}}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{\text{لا} + ۱}{\sqrt{۲}}$

(۸) $\int \frac{\text{لا}^۲ + \text{لا} + ۱}{\text{لا}^۲ - \text{لا} + ۱}\,\text{فرلا} = \text{لا} + \text{لوک}\,(\text{لا}^۲ - \text{لا} + ۱) + \frac{۲}{\sqrt{۳}}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{۲\text{لا} - ۱}{\sqrt{۳}}$

(۹) $\int \frac{\text{لا} + ۱}{(\text{لا} - ۱)^۲}\,\text{فرلا} = \text{لوک}\,(\text{لا} - ۱) - \frac{۲}{\text{لا} - ۱}$

(۱۰) $\int \frac{\text{لا}\ \text{فرلا}}{\text{لا}^۲ + ۶\text{لا} + ۸} = \text{لوک}\,\frac{(\text{لا} + ۴)^۲}{\text{لا} + ۲}$

(۱۱) $\int \frac{\text{لا}^۲ - ۱}{(\text{لا} - ۲)(\text{لا} - ۳)}\,\text{فرلا} = \text{لا} - ۳\,\text{لوک}\,(\text{لا} - ۲) + ۸\,\text{لوک}\,(\text{لا} - ۳)$

(۱۲) $\int \frac{\text{لا}^۲ + \text{لا} + ۱}{\text{لا}^۲ - \text{لا} - ۱}\,\text{فرلا} = \text{لا} + \left(\frac{۳}{\sqrt{۵}} + ۱\right)\text{لوک}\,(۲\text{لا} - \sqrt{۵} - ۱) - \left(\frac{۳}{\sqrt{۵}} - ۱\right)\text{لوک}\,(۲\text{لا} + \sqrt{۵} - ۱)$

(۱۳) $\int \frac{۱ - \text{لا}^{۲م}}{۱ - \text{لا}^۲}\,\text{فرلا} = \text{لا} + \frac{\text{لا}^۳}{۳} + \frac{\text{لا}^۵}{۵} + \cdots + \frac{۱}{۲م - ۱}\,\text{لا}^{۲م - ۱}$

(۱۴) $\int \frac{۱ - (-۱)^{م}\,\text{لا}^{۲م}}{۱ + \text{لا}^۲}\,\text{فرلا} = \text{لا} - \frac{۱}{۳}\text{لا}^۳ + \frac{۱}{۵}\text{لا}^۵ - \cdots + (-۱)^{م - ۱} \times \frac{۱}{۲م - ۱} \times \text{لا}^{۲م - ۱}$

امثلہ ۲۶

(۱) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۲ - ۳\text{لا}^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\,\text{جب}^{-۱}\,\sqrt{\frac{۳}{۲}}\,\text{لا}$

(۲) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۲ + ۳\text{لا}^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\,\text{جبز}^{-۱}\,\sqrt{\frac{۳}{۲}}\,\text{لا}$

(۳) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}(۱ - \text{لا})}} = \text{جب}^{-۱}\,(۲\text{لا} - ۱)$

(۴) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}(\text{لا}+۱)}} = \text{جمز}^{-۱}(۲\text{لا}+۱)$

(۵) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}(\text{لا}-۱)}} = \text{جمز}^{-۱}(۲\text{لا}-۱)$

(۶) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۱+۲\text{لا}+۳\text{لا}^{۲}}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\,\text{جبز}^{-۱}\frac{۳\text{لا}+۱}{\sqrt{۲}}$

(۷) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۱+۲\text{لا}-۳\text{لا}^{۲}}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\,\text{جب}^{-۱}\frac{۳\text{لا}-۱}{۲}$

(۸) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۲\text{ا}\text{لا}-\text{لا}^{۲}}} = \text{جم}^{-۱}\left(۱-\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)$

(۹) $\int \sqrt{\frac{\text{ا}-\text{لا}}{\text{لا}}}\,\text{فرلا} = \sqrt{\text{لا}(\text{ا}-\text{لا})} + \frac{\text{ا}}{۲}\,\text{جب}^{-۱}\frac{۲\text{لا}-\text{ا}}{\text{ا}}$

(۱۰) $\int \sqrt{\frac{۱+\text{لا}}{۱-\text{لا}}}\,\text{فرلا} = \text{جب}^{-۱}\text{لا} - \sqrt{۱-\text{لا}^{۲}}$

(۱۱) $\int \sqrt{\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}}\,\text{فرلا} = \sqrt{\text{لا}^{۲}-۱} + \text{جمز}^{-۱}\text{لا}$

امثلہ ۲۷

متغیر کی تبدیلی

(۱) $\int \frac{\text{لا}^{۲}\,\text{فرلا}}{۱-\text{لا}^{۳}} = \frac{۱}{۳}\,\text{لوک}\,\frac{۱}{۱-\text{لا}^{۳}}$

(۲) $\int \frac{\text{لا}^{۲}\,\text{فرلا}}{۱-\text{لا}^{۶}} = \frac{۱}{۶}\,\text{لوک}\,\frac{۱+\text{لا}^{۳}}{۱-\text{لا}^{۳}}$ ، $\int \frac{\text{لا}^{۲}\,\text{فرلا}}{۱+\text{لا}^{۶}} = \frac{۱}{۳}\,\text{اسں}^{-۱}\text{لا}^{۳}$

(۳) $\int \frac{\text{لوک}\,\text{لا}}{\text{لا}}\,\text{فرلا} = \frac{۱}{۲}(\text{لوک}\,\text{لا})^{۲}$

(۴) $\int \text{جب لا جم لا فرلا} = \frac{1}{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{لا}$

(۵) $\int \frac{\text{جب}^{-1}\,\text{لا}}{\sqrt{1-\text{لا}^{2}}}\,\text{فرلا} = \frac{1}{2}\left(\text{جب}^{-1}\,\text{لا}\right)^{2}$

(۶) $\int \frac{\text{جم لا}}{1+\text{جب لا}}\,\text{فرلا} = \text{لوک}\,(1+\text{جب لا})$ ،

$\int \frac{\text{جب لا فرلا}}{\text{ا}+\text{ب جم لا}} = -\frac{1}{\text{ب}}\,\text{لوک}\,(\text{ا}+\text{ب جم لا})$

(۷) $\int \text{جب لا جم}^{3}\,\text{لا فرلا} = -\frac{1}{4}\,\text{جم}^{4}\,\text{لا}$

(۸) $\int \frac{\text{جب لا جم لا}}{\text{ا جم}^{2}\,\text{لا}+\text{ب جب}^{2}\,\text{لا}}\,\text{فرلا} = \frac{1}{2(\text{ب}-\text{ا})}\,\text{لوک}\,(\text{ا جم}^{2}\,\text{لا}+\text{ب جب}^{2}\,\text{لا})$

(۹) $\int \text{مس}^{3}\,\text{لا فرلا} = \frac{1}{2}\,\text{مس}^{2}\,\text{لا}+\text{لوک جم لا}$

(۱۰) $\int \frac{\text{جب لا}}{\text{جم}^{5}\,\text{لا}}\,\text{فرلا} = \frac{1}{4}\,\text{قط}^{4}\,\text{لا}$

(۱۱) $\int \text{قط}^{4}\,\text{لا فرلا} = \text{مس لا}+\frac{1}{3}\,\text{مس}^{3}\,\text{لا}$

۱۹۶ (۱۲) $\int (\text{قط لا}+\text{مس لا})\,\text{فرلا} = \text{لوک}\,\frac{1}{1-\text{جب لا}}$ ،

$\int (\text{قط لا}-\text{مس لا})\,\text{فرلا} = \text{لوک}\,(1+\text{جب لا})$

(۱۳) $\int \frac{\text{فرلا}}{1+\text{جم لا}} = \text{قم لا}-\text{هم لا}$ ، $\int \frac{\text{فرلا}}{1-\text{جم لا}} = -\text{هم لا}-\text{قم لا}$

(۱۴) $\int \frac{\text{فرلا}}{1+\text{جب لا}} = \text{مس لا}-\text{قط لا}$ ، $\int \frac{\text{فرلا}}{1-\text{جب لا}} = \text{مس لا}+\text{قط لا}$

(۱۵) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جب}^{\text{۲}}\text{لا جم}^{\text{۲}}\text{لا}} = \text{مس لا} - \text{مم لا}$

(۱۶) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جب لا جم}^{\text{۲}}\text{لا}} = \text{قط لا} + \text{لوک مس}\ \frac{\text{لا}}{\text{۲}}$

(۱۷) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جب لا جم}^{\text{۳}}\text{لا}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\ \text{قط}^{\text{۲}}\text{لا} + \text{لوک مس لا}$

(۱۸) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{۱} + \text{مس لا}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\ \text{لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\ \text{لوک}\ (\text{جم لا} + \text{جب لا})$

(۱۹) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{۱} + \text{جم}^{\text{۲}}\text{لا}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}\sqrt{\text{۲}}}\ \text{مس}^{-\text{۱}}\left(\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}}}\ \text{مس لا}\right)$

(۲۰) $\int \text{لا}\ \sqrt{\text{ا}^{\text{۲}} + \text{لا}^{\text{۲}}}\ \text{فرلا} = \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\ (\text{ا}^{\text{۲}} + \text{لا}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}$

(۲۱) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\ (\text{لا}^{\text{ن}} + \text{۱})} = \frac{\text{۱}}{\text{ن}}\ \text{لوک}\ \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}} + \text{۱}}$

(۲۲) زاویٔی ابدالوں سے $\int \sqrt{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{ا}^{\text{۲}}}\ \text{فرلا}$ اور $\int \sqrt{\text{لا}^{\text{۲}} - \text{ا}^{\text{۲}}}\ \text{فرلا}$ کی قیمتیں دریافت کرو۔

(۲۳) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{\text{۲}}\sqrt{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}} = -\ \frac{\sqrt{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}}{\text{لا}}$

(۲۴) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{\text{۲}}\sqrt{\text{ا}^{\text{۲}} - \text{لا}^{\text{۲}}}} = -\ \frac{\sqrt{\text{ا}^{\text{۲}} - \text{لا}^{\text{۲}}}}{\text{ا}^{\text{۲}}\ \text{لا}}$

(۲۵) $\int \frac{\text{لا}^{\text{۳}}\ \text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا}^{\text{۲}} + \text{لا}^{\text{۲}}}} = \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\ (\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۲ا}^{\text{۲}})\ \sqrt{\text{ا}^{\text{۲}} + \text{لا}^{\text{۲}}}$

امثلہ ۲۸
تکمل بالحصص

(۱) $\int \text{لا قو}^{\text{لا}}\ \text{فرلا} = (\text{لا} - ۱)\ \text{قو}^{\text{لا}}$

(۲) $\int \text{لا لوک لا فرلا} = \frac{۱}{۲}\ \text{لا}^{۲} \left(\text{لوک لا} - \frac{۱}{۲}\right)$

(۳) $\int \text{لا}^{\text{م}}\ \text{لوک لا فرلا} = \frac{\text{لا}^{\text{م}+۱}}{\text{م}+۱} \left(\text{لوک لا} - \frac{۱}{\text{م}+۱}\right)$

(۴) $\int \text{لا جب لا فرلا} = - \text{لا جم لا} + \text{جب لا}$

(۵) $\int \text{لا جم لا فرلا} = \text{لا جب لا} + \text{جم لا}$

۱۹۷ (۶) $\int \text{لا جب لا جم لا فرلا} = - \frac{۱}{۴}\ \text{لا جم ۲لا} + \frac{۱}{۸}\ \text{جب ۲لا}$

(۷) $\int \text{جم م لا جم ن لا فرلا} = \frac{\text{م جب م لا جم ن لا} - \text{ن جم م لا جب ن لا}}{\text{م}^{۲} - \text{ن}^{۲}}$

(۸) $\int \text{جب م لا جب ن لا فرلا} = \frac{\text{ن جب م لا جم ن لا} - \text{م جم م لا جب ن لا}}{\text{م}^{۲} - \text{ن}^{۲}}$

(۹) $\int \text{جب م لا جم ن لا فرلا} = - \frac{\text{م جم م لا جم ن لا} + \text{ن جب م لا جب ن لا}}{\text{م}^{۲} - \text{ن}^{۲}}$

(۱۰) $\int \text{جب}^{-۱}\ \text{لا فرلا} = \text{لا جب}^{-۱}\ \text{لا} + \sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}$

(۱۱) $\int \text{مس}^{-۱}\ \text{لا فرلا} = \text{لا مس}^{-۱}\ \text{لا} - \text{لوک} \sqrt{۱ + \text{لا}^{۲}}$

(۱۲) $\int \text{قط}^{-۱}\ \text{لا فرلا} = \text{لا قط}^{-۱}\ \text{لا} - \text{جمز}^{-۱}\ \text{لا}$

(۱۳) $\int \text{لا}\,\text{مس}^{-1}\text{لا}\,\text{فرلا} = \frac{1}{2}(1+\text{لا}^{2})\,\text{مس}^{-1}\text{لا} - \frac{1}{2}\text{لا}$

(۱۴) $\int \text{لا}\,\text{قط}^{2}\text{لا}\,\text{فرلا} = \text{لا}\,\text{مس}\,\text{لا} + \text{لوک}\,\text{جم}\,\text{لا}$

(۱۵) $\int \frac{\text{لا} + \text{جب}\,\text{لا}}{1 + \text{جم}\,\text{لا}}\,\text{فرلا} = \text{لا}\,\text{مس}\,\frac{\text{لا}}{2}$

(۱۶) $\int \frac{\text{لا}\,\text{جب}^{-1}\text{لا}\,\text{فرلا}}{\sqrt{1-\text{لا}^{2}}} = -\sqrt{1-\text{لا}^{2}}\,\text{جب}^{-1}\text{لا} + \text{لا}$

(۱۷) $\int \text{جمز}\,\text{لا}\,\text{جم}\,\text{لا}\,\text{فرلا} = \frac{1}{2}(\text{جبز}\,\text{لا}\,\text{جم}\,\text{لا} + \text{جمز}\,\text{لا}\,\text{جب}\,\text{لا})$

(۱۸) $\int \text{جبز}\,\text{لا}\,\text{جب}\,\text{لا}\,\text{فرلا} = \frac{1}{2}(\text{جمز}\,\text{لا}\,\text{جب}\,\text{لا} - \text{جبز}\,\text{لا}\,\text{جم}\,\text{لا})$

(۱۹) $\int \text{جمز}\,\text{لا}\,\text{جب}\,\text{لا}\,\text{فرلا} = \frac{1}{2}(\text{جبز}\,\text{لا}\,\text{جب}\,\text{لا} - \text{جمز}\,\text{لا}\,\text{جم}\,\text{لا})$

(۲۰) $\int \text{جبز}\,\text{لا}\,\text{جم}\,\text{لا}\,\text{فرلا} = \frac{1}{2}(\text{جمز}\,\text{لا}\,\text{جم}\,\text{لا} + \text{جبز}\,\text{لا}\,\text{جب}\,\text{لا})$

(۲۱) $\int \text{فو}^{\text{لا}}\,\text{جب}\,\text{لا}\,\text{جم}\,\text{لا}\,\text{فرلا} = \frac{1}{10}(\text{جب}\,2\text{لا} - 2\,\text{جم}\,2\text{لا})\,\text{فو}^{\text{لا}}$

(۲۲) $\int \text{لا}^{5}\,\text{فو}^{-\text{لا}}\,\text{فرلا} = -(\text{لا}^{5} + 5\text{لا}^{4} + 20\text{لا}^{3} + 60\text{لا}^{2} + 120\text{لا} + 120)\,\text{فو}^{-\text{لا}}$

(۲۳) $\int \text{لا}^{4}\,\text{جب}\,\text{لا}\,\text{فرلا} = -(\text{لا}^{4} - 12\text{لا}^{2} + 24)\,\text{جم}\,\text{لا} + (4\text{لا}^{3} - 24\text{لا})\,\text{جب}\,\text{لا}$

(۲۴) اگر $\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جمز}\,\text{لا}\,\text{فرلا}$ اور $\text{و}_{\text{ن}} = \int \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جبز}\,\text{لا}\,\text{فرلا}$

تو ثابت کرو کہ $\text{ع}_{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جبز}\,\text{لا} - \text{ن}\,\text{و}_{\text{ن}-1}$ اور $\text{و}_{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جمز}\,\text{لا} - \text{ن}\,\text{ع}_{\text{ن}-1}$

اس کی مدد سے ع_{4} اور و_{4} کی قیمتیں دریافت کرو

[$\text{ع}_{4} = (\text{لا}^{4} + 12\text{لا}^{2} + 24)\,\text{جبز}\,\text{لا} - (4\text{لا}^{3} + 24\text{لا})\,\text{جمز}\,\text{لا}$

$\text{و}_{4} = (\text{لا}^{4} + 12\text{لا}^{2} + 24)\,\text{جمز}\,\text{لا} - (4\text{لا}^{3} + 24\text{لا})\,\text{جبز}\,\text{لا}$]

(۲۵) اگر ع متغیر لا کا منطق صحیح تفاعل ہے تو ثابت کرو کہ

$$\int \text{قو}^{\text{الا}} \times \text{ع}\,\text{فرلا} = \frac{\text{قو}^{\text{الا}}}{\text{ا}}\left(\text{ع} - \frac{\text{عف}}{\text{ا}} + \frac{\text{عف}^{2}}{\text{ا}^{2}} - \cdots\right)$$

ع جہاں $\text{عف} = \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$

(۲۶) سروں ا اور ب کی قیمت دریافت کرو کہ

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{ا} + \text{ب جم لا})^{2}} = \frac{\text{ا}'\,\text{جب لا}}{\text{ا} + \text{ب جم لا}} + \text{ب}' \int \frac{\text{فرلا}}{\text{ا} + \text{ب جم لا}}$$

$$\left[\text{ا}' = \frac{-\text{ب}}{\text{ا}^{2} - \text{ب}^{2}},\quad \text{ب}' = \frac{\text{ا}}{\text{ا}^{2} - \text{ب}^{2}}\right]$$

۱۹۸

امثلہ ۲۹

(منطق کسور)

(۱) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}(1 - \text{لا}^{2})} = \text{لوک}\,\frac{\text{لا}}{\sqrt{1 - \text{لا}^{2}}}$$

(۲) $$\int \frac{2\text{لا} + 3}{\text{لا}(\text{لا} - 1)(\text{لا} + 3)}\,\text{فرلا} = \text{لوک}\,\frac{(\text{لا} - 1)^{\frac{5}{4}}}{\left(\text{لا}^{4}(\text{لا} + 3)\right)^{\frac{1}{4}}}$$

(۳) $$\int \frac{\text{لا}^{2}\,\text{فرلا}}{(\text{لا} - 1)(\text{لا} - 2)(\text{لا} - 3)} = \frac{1}{2}\text{لوک}(\text{لا} - 1) - 4\,\text{لوک}(\text{لا} - 2) + \frac{9}{2}\text{لوک}(\text{لا} - 3)$$

(۴) $$\int \frac{2\text{لا} - 3}{(\text{لا}^{2} - 1)(2\text{لا} + 3)}\,\text{فرلا} = \frac{5}{2}\text{لوک}(\text{لا} + 1) - \frac{1}{10}\text{لوک}(\text{لا} - 1) - \frac{12}{5}\text{لوک}(2\text{لا} + 3)$$

(۵) $$\int \frac{\text{لا}\,\text{فرلا}}{\text{لا}^{4} - \text{لا}^{2} - 2} = \frac{1}{6}\text{لوک}\,\frac{\text{لا}^{2} - 2}{\text{لا}^{2} + 1}$$

(۶) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{3} + 3\text{لا}^{2} - 4} = \frac{1}{3(\text{لا} + 2)} + \frac{1}{9}\text{لوک}\,\frac{\text{لا} - 1}{\text{لا} + 2}$$

(۷) $$\int \frac{\text{لا}^{2}\,\text{فرلا}}{(\text{لا} - \text{ا})(\text{لا} - \text{ب})(\text{لا} - \text{ج})} = \frac{\text{ا}^{2}}{(\text{ا} - \text{ب})(\text{ا} - \text{ج})}\,\text{لوک}(\text{لا} - \text{ا})$$

$$+\frac{\text{ب}^2\,\text{لوک}\,(\text{لا}-\text{ب})}{(\text{ب}-\text{ج})(\text{ب}-\text{ا})}+\frac{\text{ج}^2\,\text{لوک}\,(\text{لا}-\text{ج})}{(\text{ج}-\text{ا})(\text{ج}-\text{ب})}$$

(۸) $$\int\frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^2+\text{ا}^2)(\text{لا}^2+\text{ب}^2)}=\frac{1}{\text{ب}^2-\text{ا}^2}\left(\frac{1}{\text{ا}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}-\frac{1}{\text{ب}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ب}}\right)$$

(۹) $$\int\frac{\text{لا}\,\text{فرلا}}{(\text{لا}^2+\text{ا}^2)(\text{لا}^2+\text{ب}^2)}=\frac{1}{2(\text{ب}^2-\text{ا}^2)}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}^2+\text{ا}^2}{\text{لا}^2+\text{ب}^2}$$

(۱۰) $$\int\frac{\text{لا}^2\,\text{فرلا}}{(\text{لا}^2+\text{ا}^2)(\text{لا}^2+\text{ب}^2)}=\frac{1}{\text{ا}^2-\text{ب}^2}\left(\text{ا}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}-\text{ب}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ب}}\right)$$

(۱۱) $$\int\frac{\text{لا}^3\,\text{فرلا}}{(\text{لا}^2+\text{ا}^2)(\text{لا}^2+\text{ب}^2)}=\frac{1}{2(\text{ا}^2-\text{ب}^2)}\left\{\text{ا}^2\,\text{لوک}\,(\text{لا}^2+\text{ا}^2)-\text{ب}^2\,\text{لوک}\,(\text{لا}^2+\text{ب}^2)\right\}$$

(۱۲) $$\int\frac{\text{لا}\,\text{فرلا}}{(\text{لا}+1)(\text{لا}+2)^2}=-\frac{2}{\text{لا}+2}+\text{لوک}\,\frac{\text{لا}+2}{\text{لا}+1}$$

(۱۳) $$\int\frac{\text{لا}^2\,\text{فرلا}}{(\text{لا}+1)(\text{لا}+2)^2}=\frac{4}{\text{لا}+2}+\text{لوک}\,(\text{لا}+1)$$

(۱۴) $$\int\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^3-\text{لا}^2-\text{لا}+1}=\frac{1}{4}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}+1}{\text{لا}-1}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\text{لا}-1}$$

(۱۵) $$\int\frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^2-1)^2}=-\frac{1}{2}\times\frac{\text{لا}}{\text{لا}^2-1}+\frac{1}{4}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}+1}{\text{لا}-1}$$

(۱۶) $$\int\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2(1-\text{لا})^2}=\frac{2\text{لا}-1}{\text{لا}(1-\text{لا})}+2\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}}{1-\text{لا}}$$ ۱۹۹

(۱۷) $$\int\frac{\text{لا}^2\,\text{فرلا}}{(\text{لا}^2-1)^2}=-\frac{1}{2}\times\frac{\text{لا}}{\text{لا}^2-1}-\frac{1}{4}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}+1}{\text{لا}-1}$$

(۱۸) $$\int\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2(\text{لا}^2-1)^2}=-\frac{3}{4}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}-1}{\text{لا}+1}-\frac{1}{\text{لا}}-\frac{1}{2}\times\frac{\text{لا}}{\text{لا}^2-1}$$

(۱۹) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{۳}(\text{لا}+۱)} = -\frac{۱}{۲\,\text{لا}^{۲}} + \frac{۱}{\text{لا}} - \text{لوک}\,(\text{لا}+۱) + \text{لوک}\,\text{لا}$$

(۲۰) $$\int \frac{۳\,\text{لا}+۲}{\text{لا}\,(\text{لا}+۱)^{۳}}\,\text{فرلا} = ۲\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}}{۱+\text{لا}} + \frac{۲}{۱+\text{لا}} - \frac{۱}{۲\,(\text{لا}+۱)^{۲}}$$

(۲۱) $$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^{۲}-۱)^{۳}} = \frac{۳}{۱۶}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}+۱} + \frac{۳}{۸}\times\frac{\text{لا}}{\text{لا}^{۲}-۱} - \frac{۱}{۴}\times\frac{\text{لا}}{(\text{لا}^{۲}-۱)^{۲}}$$

(۲۲) $$\int \frac{۱+\text{لا}}{\text{لا}\,(۱+\text{لا}^{۲})}\,\text{فرلا} = \text{لوک}\,\frac{\text{لا}}{\sqrt{۱+\text{لا}^{۲}}} + \text{مس}^{-۱}\,\text{لا}$$

(۲۳) $$\int \frac{\text{فرلا}}{۱-\text{لا}^{۴}} = \frac{۱}{۴}\,\text{لوک}\,\frac{۱+\text{لا}}{۱-\text{لا}} + \frac{۱}{۲}\,\text{مس}^{-۱}\,\text{لا}$$

(۲۴) $$\int \frac{\text{لا}^{۲}\,\text{فرلا}}{۱-\text{لا}^{۴}} = \frac{۱}{۴}\,\text{لوک}\,\frac{۱+\text{لا}}{۱-\text{لا}} - \frac{۱}{۲}\,\text{مس}^{-۱}\,\text{لا}$$

(۲۵) $$\int \frac{\text{فرلا}}{۱+\text{لا}^{۳}} = \frac{۱}{۶}\,\text{لوک}\,\frac{(۱+\text{لا})^{۲}}{۱-\text{لا}+\text{لا}^{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{۲\,\text{لا}-۱}{\sqrt{۳}}$$

(۲۶) $$\int \frac{\text{لا}\,\text{فرلا}}{۱+\text{لا}^{۳}} = \frac{۱}{۶}\,\text{لوک}\,\frac{۱-\text{لا}+\text{لا}^{۲}}{(۱+\text{لا})^{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{۲\,\text{لا}-۱}{\sqrt{۳}}$$

(۲۷) $$\int \frac{\text{فرلا}}{(۱+\text{لا})(۱+\text{لا}^{۲})} = \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,(۱+\text{لا}) - \frac{۱}{۴}\,\text{لوک}\,(۱+\text{لا}^{۲}) + \frac{۱}{۲}\,\text{مس}^{-۱}\,\text{لا}$$

(۲۸) $$\int \frac{\text{لا}^{۲}\,\text{فرلا}}{(۱+\text{لا})(۱+\text{لا}^{۲})} = \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,(۱+\text{لا}) + \frac{۱}{۴}\,\text{لوک}\,(۱+\text{لا}^{۲}) - \frac{۱}{۲}\,\text{مس}^{-۱}\,\text{لا}$$

(۲۹) $$\int \frac{\text{لا}^{۲}\,\text{فرلا}}{\text{لا}^{۴}+\text{لا}^{۲}-۲} = \frac{۱}{۶}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}+۱} + \frac{\sqrt{۲}}{۳}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{\text{لا}}{\sqrt{۲}}$$

(۳۰) $$\int \frac{\text{لا}^{۳}\,\text{فرلا}}{\text{لا}^{۴}+۳\,\text{لا}^{۲}+۲} = \text{لوک}\,(\text{لا}^{۲}+۲) - \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,(\text{لا}^{۲}+۱)$$

(۳۱) $$\int \frac{\text{لا}^{۲}\,\text{فرلا}}{(\text{لا}-۱)^{۲}(\text{لا}^{۲}+۱)} = \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,(\text{لا}-۱) - \frac{۱}{۴}\,\text{لوک}\,(\text{لا}^{۲}+۱) - \frac{۱}{۲\,(\text{لا}-۱)}$$

(۳۲) $\int \frac{\text{لا}^2 - 1}{\text{لا}^4 + \text{لا}^2 + 1}\,\text{فرلا} = \frac{1}{2}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}^2 - \text{لا} + 1}{\text{لا}^2 + \text{لا} + 1}$

(۳۳) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^4(1 + \text{لا}^2)} = \text{مس}^{-1}\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} - \frac{1}{3\,\text{لا}^3}$

(۳۴) $\int \frac{\text{لا}^3\,\text{فرلا}}{(1 + \text{لا}^2)^3} = -\frac{1 + 2\,\text{لا}^2}{4(1 + \text{لا}^2)^2}$

(۳۵) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2(1 + \text{لا}^2)^2} = -\frac{2 + 3\,\text{لا}^2}{2\,\text{لا}(1 + \text{لا}^2)} - \frac{3}{2}\,\text{مس}^{-1}\text{لا}$ ۲۰۰

(۳۶) $\int \frac{\text{فرلا}}{1 + \text{لا}^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\text{لوک}\,\frac{1 + \sqrt{2}\,\text{لا} + \text{لا}^2}{1 - \sqrt{2}\,\text{لا} + \text{لا}^2}$

$+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\sqrt{2}\,\text{لا}}{1 - \text{لا}^2}$

(۳۷) $\int \frac{\text{لا}^2\,\text{فرلا}}{1 + \text{لا}^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\text{لوک}\,\frac{1 - \sqrt{2}\,\text{لا} + \text{لا}^2}{1 + \sqrt{2}\,\text{لا} + \text{لا}^2}$

$+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\sqrt{2}\,\text{لا}}{1 - \text{لا}^2}$

امثلہ ۳۰

(غیر منطق تفاعل)

(۱) $\int \text{لا}\sqrt{1 + \text{لا}}\,\text{فرلا} = \frac{2}{5} \times (1 + \text{لا})^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1 + \text{لا})^{\frac{3}{2}}$

(۲) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا} + \text{ا}} + \sqrt{\text{لا} + \text{ب}}} = \frac{2}{3(\text{ا} - \text{ب})}\left\{(\text{لا} + \text{ا})^{\frac{3}{2}} - (\text{لا} + \text{ب})^{\frac{3}{2}}\right\}$

(۳) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}} - 1} = 2\sqrt{\text{لا}} + 2\,\text{لوک}\,(\sqrt{\text{لا}} - 1)$

(۴) $$\int \frac{\text{فرلا}}{(۱-\text{لا})\sqrt{\text{لا}}} = \text{لوک}\,\frac{۱+\sqrt{\text{لا}}}{۱-\sqrt{\text{لا}}}$$

(۵) $$\int \frac{\text{فرلا}}{(۱-\text{لا})\sqrt{۱+\text{لا}}} = \sqrt{۲}\;\text{مسز}^{-۱}\sqrt{\frac{۱+\text{لا}}{۲}}$$

(۶) $$\int \frac{\text{فرلا}}{(۱+\text{لا})\sqrt{۱-\text{لا}}} = -\sqrt{۲}\;\text{مسز}^{-۱}\sqrt{\frac{۱-\text{لا}}{۲}}$$

(۷) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}+\sqrt{\text{لا}-۱}} = \text{لوک}\left(\text{لا}+\sqrt{\text{لا}-۱}\right) - \frac{۲}{\sqrt{۳}}\;\text{مس}^{-۱}\,\frac{۲\sqrt{\text{لا}-۱}+۱}{\sqrt{۳}}$$

(۸) $$\int \frac{\sqrt{\text{لا}}}{\text{لا}-۱}\,\text{فرلا} = ۲\sqrt{\text{لا}} + \text{لوک}\,\frac{\sqrt{\text{لا}}-۱}{\sqrt{\text{لا}}+۱}$$

(۹) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{۱+\text{لا}}} = \text{لوک}\,\frac{\sqrt{۱+\text{لا}}-۱}{\sqrt{۱+\text{لا}}+۱}$$

(۱۰) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{۲}\sqrt{۱+\text{لا}}} = -\frac{\sqrt{۱+\text{لا}}}{\text{لا}} - \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,\frac{\sqrt{۱+\text{لا}}-۱}{\sqrt{۱+\text{لا}}+۱}$$

(۱۱) $$\int \frac{\text{لا}^{۲}\,\text{فرلا}}{\sqrt{۱+\text{لا}^{۲}}} = \frac{۱}{۲}\,\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{۲}+۱} - \frac{۱}{۲}\,\text{جبز}^{-۱}\,\text{لا}$$

(۱۲) $$\int \frac{\text{لا}^{۲}\,\text{فرلا}}{(۱+\text{لا}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}} = -\frac{\text{لا}}{\sqrt{۱+\text{لا}^{۲}}} + \text{جبز}^{-۱}\,\text{لا}$$

(۱۳) $$\int \frac{\text{فرلا}}{(۱+\text{لا}^{۲})\sqrt{۱-\text{لا}^{۲}}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\;\text{مس}^{-۱}\,\frac{\sqrt{۲}\,\text{لا}}{\sqrt{۱-\text{لا}^{۲}}}$$

(۱۴) $$\int \frac{\text{فرلا}}{(۱-\text{لا}^{۲})\sqrt{۱+\text{لا}^{۲}}} = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\,\text{لوک}\,\frac{\sqrt{۱+\text{لا}^{۲}}+\sqrt{۲}\,\text{لا}}{\sqrt{۱+\text{لا}^{۲}}-\sqrt{۲}\,\text{لا}}$$

ساتواں باب

محدود تکملے

۸۷۔ **تمہید۔ رقبوں کا سوال۔** تکمل کے سوال کا جو مفہوم اب ہم بیان کرینگے اس کے لحاظ سے یہ سوال بہت قدیم ہے لیکن اس کے حل کا عام طریقہ حال میں ہی نیوٹن اور لیب نیز کے وقت میں حاصل ہوا۔ اس دفعہ اور اگلی دفعہ میں اس طریقہ کو منطقی تفصیلات میں جانے کے بغیر مختصر طور پر بیان کیا جائیگا اور یہ مان لیا جائیگا کہ "رقبوں کا سوال" کافی طور پر اس طریقہ کی تمثیلی صورت ہے۔ اس طرح اصل اصول آسانی سے سمجھ میں آجائیگا۔ اسکے بعد دفعات ۸۹ تا ۹۴ میں اس سوال پر نئے سرے سے زیادہ عام اور دقیق نقطۂ نظر سے بحث کی جائے گی۔ ۲۰۱

فرض کرو کہ وہ رقبہ* دریافت کرنا مطلوب ہے جو مسلسل منحنی

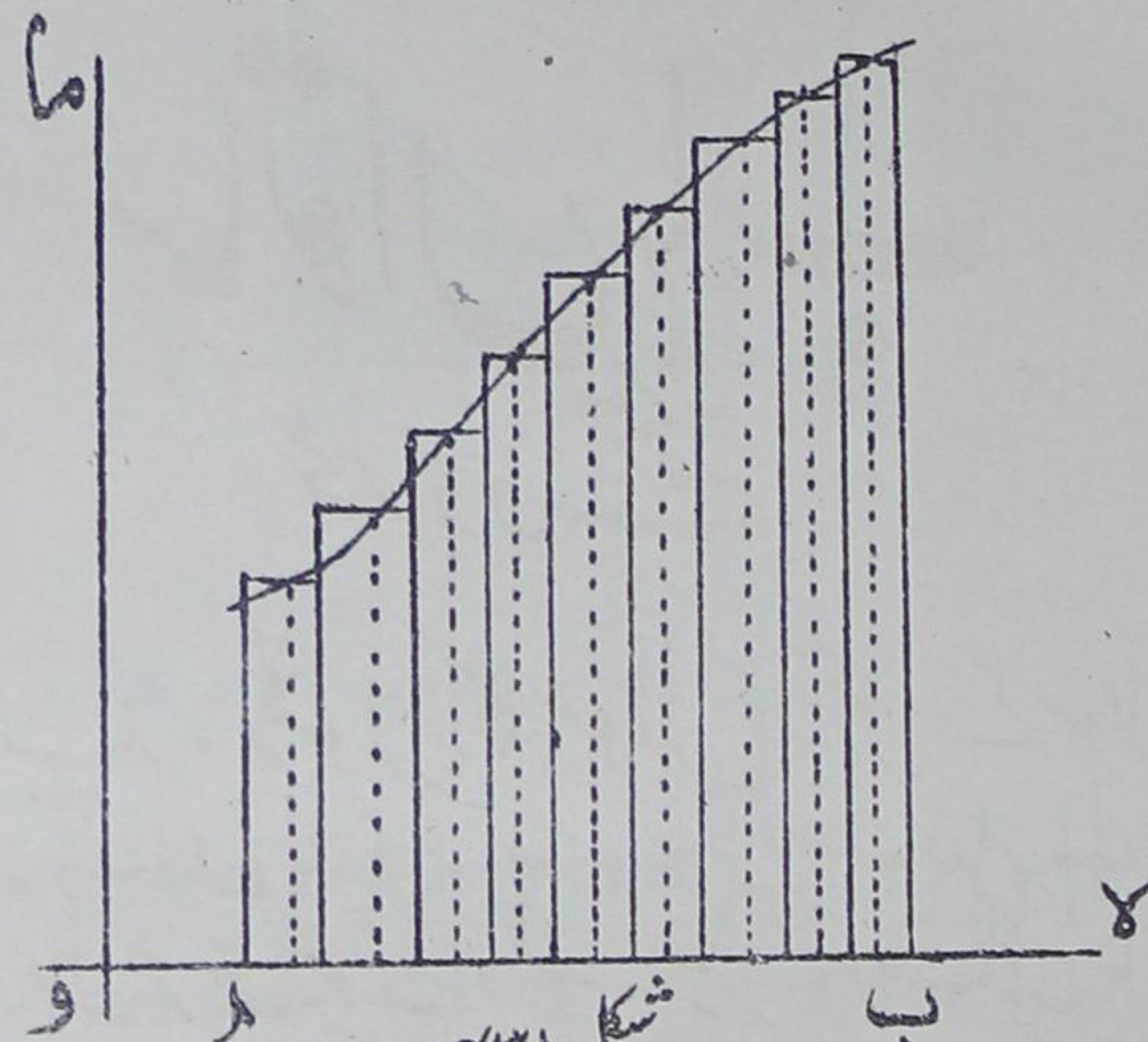
ما = فما (لا) ....(۱)

محور لا اور معینوں لا = ا، لا = ب کے درمیان گھرا ہوا ہے۔ تعیین کی خاطر یہ فرض کرلیا جاتا ہے کہ ما، لا کی سعت زیر بحث میں مثبت ہے اور ب > ا۔ اس سعت ب۔ ا کو ہم ذیلی حصوں ھ۱، ھ۲، .... ھن

---

* اس دفعہ اور اگلی دفعہ میں لفظ "رقبہ" کو عام وجدانی یا عقلی مفہوم کے مطابق لیا جائے گا جدید نقطہ نظر سے رقبہ کی نئی تعریف ضروری ہے۔ دیکھو دفعہ ۹۹۔

میں تقسیم کرتے اور ان کو قاعدے مان کر مستطیلوں کا ایک سلسلہ بناتے ہیں
جن کے ارتفاع ترتیب وار ما۱، ما۲، ما۳ ...... مان منحنی کے ایسے معین ہیں

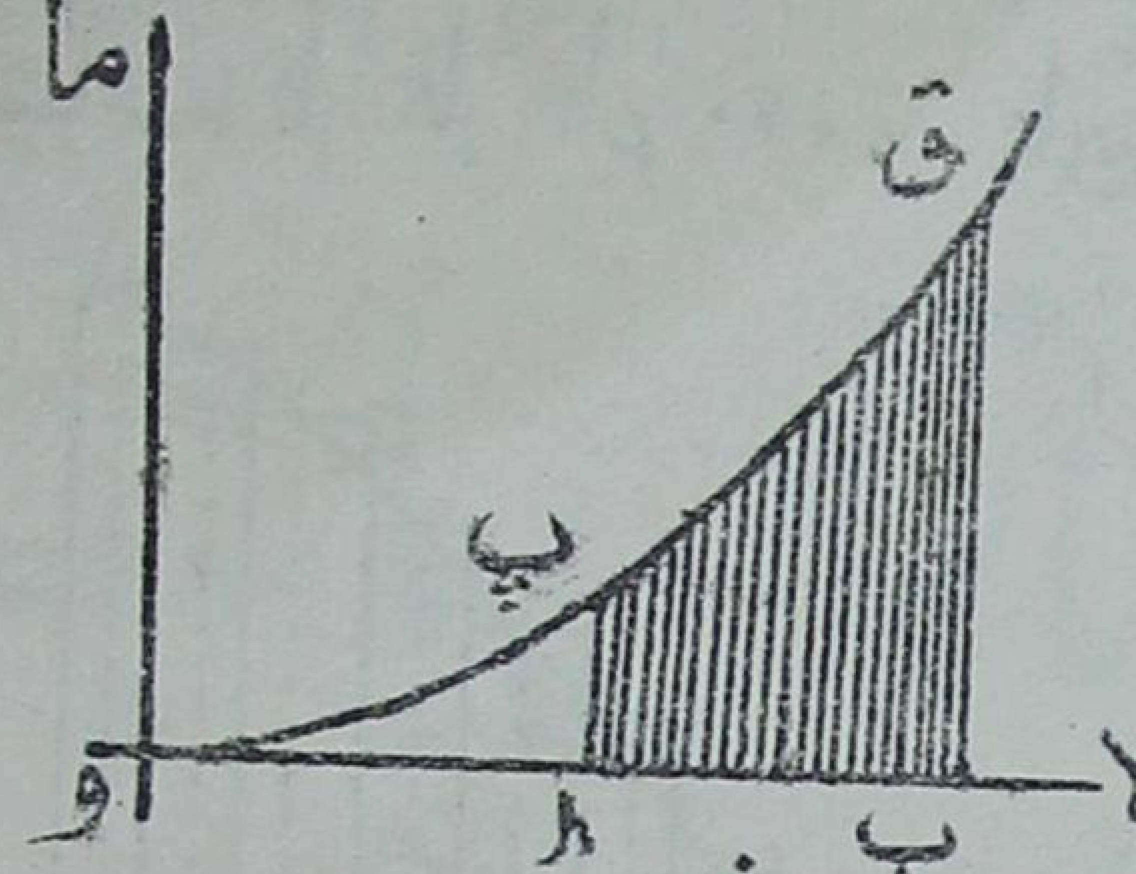


شکل (۳۴)

۲۰۴ جنہیں مختلف قاعدوں کے اندر کے کسی اختیاری نقطوں سے منحنی تک کھینچا گیا ہے
اس طور پر جو مستطیل بنائے جائیں ان کے رقبوں کا مجموعہ رقبہ مطلوبہ کا ایک
تقریب ہوگا۔ ممکن ہے کہ یہ تقریب رقبہ کو صحیح طور پر تعبیر کرے لیکن
یہ ظاہر ہے کہ ذیلی حصوں ھ۱، ھ۲، ھ۳ .... ھن کو جتنا چھوٹا لیا جائیگا
یعنی تقسیم کے حصوں کی متناظر تعداد جسقدر زیادہ ہوگی اتنا ہی یہ تقریب بہتر ہوگا۔
ان مستطیلوں کے مجموعہ کی انتہا جبکہ حصوں کو لا انتہا چھوٹا بنا دیا جائے مطلوبہ
رقبہ ہوگا۔

احصائی ایجاد سے پہلے اسی طرح کا عمل یا اسکے مرادف کوئی اور عمل ہر
منحنی کے لئے بشرط امکان الگ طور پر کیا جاتا تھا اکثر اوقات یہ طریقے نہایت
فہیم اور خوش فکر ہوا کرتے تھے۔ ذیل کی مثالیں بطور توضیح کے دیجاتی ہیں۔

مثال ۱۔ جو رقبہ مکافی ما = لا^{۲}، محور لا اور معینوں لا = ا، لا = ب کے
درمیان گھرا ہوا ہے اسے دریافت کرو۔



شکل ۴۴

رکھو ھ$_{۱}$ = ھ$_{۲}$ = ھ$_{۳}$ = ... = ھ$_{ن}$ = ھ تو

ما$_{۱}$ = ا^{۲} ، ما$_{۲}$ = (ا + ھ)^{۲} ، ما$_{۳}$ = (ا + ۲ھ)^{۲} ...... ما$_{ن}$ = {ا + (ن - ۱) ھ}^{۲}

ہمیں ذیل کے مجموعہ پر غور کرنا ہے

ا^{۲}ھ + (ا + ھ)^{۲} ھ + (ا + ۲ھ)^{۲} ھ + ... + {ا + (ن - ۱) ھ}^{۲} ھ

= ن ا^{۲}ھ + ۲ {۱ + ۲ + ... + (ن - ۱)} ا ھ^{۲} + {۱^{۲} + ۲^{۲} + ... + (ن - ۱)^{۲}} ھ^{۳}

= ن ا^{۲}ھ + ن (ن - ۱) ا ھ^{۲} + ۱/۶ (ن - ۱) ن (۲ن - ۱) ھ^{۳}

= ا^{۲}(ب - ا) + (۱ - ۱/ن) ا (ب - ا)^{۲} + ۱/۳ (۱ - ۱/ن)(۱ - ۱/۲ن)(ب - ا)^{۳} ...... (۲)

جب ن مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے تو اسکی انتہائی قیمت ہوتی ہے

ا^{۲}(ب - ا) + ا (ب - ا)^{۲} + ۱/۳ (ب - ا)^{۳} یا ۱/۳ (ب^{۳} - ا^{۳}) ...... (۳)

مثال ۲۔ منحنی کی عام صورت ما = لا^{م} ...... (۴) جہاں م کی کوئی ۲۰۳
صحیح یا مکسور قیمت مثبت یا منفی سوائے -۱ کے ہو اس طور پر بحث میں آسکتی ہے۔ سعت (ب - ا) کے نقاط تقسیم کے فصلوں کو حسابی سلسلہ میں لینے کی بجائے جیسے عام طور پر لیا جاتا ہے ہندسی سلسلہ میں تقسیم کرتے ہیں، اس طرح فصلے یہ ہوتے ہیں

ا، مہ ا، مہ^{۲} ا، ...... مہ^{ن} ا جہاں مہ^{ن} = ب/ا

ذیلی حصے یہ ہونگے

$$\text{ھ}_{۱} = (\text{سا} - ۱)\,\text{ا}،\quad \text{ھ}_{۲} = (\text{سا} - ۱)\,\text{سا}\,\text{ا}،\quad \text{ھ}_{۳} = (\text{سا} - ۱)\,\text{سا}^{۲}\,\text{ا} \ldots \quad \text{ھ}_{\text{ن}} = (\text{سا} - ۱)\,\text{سا}^{\text{ن}-۱}\,\text{ا}$$

اِن حصوں کے شروع کے نقطوں پر کے معین ہیں $\text{ا}^{\text{م}}$، $\text{سا}^{\text{م}}\,\text{ا}^{\text{م}}$، $\text{سا}^{۲\text{م}}\,\text{ا}^{\text{م}}$، .... $\text{سا}^{(\text{ن}-۱)\text{م}}\,\text{ا}^{\text{م}}$

اور مجموعہ زیر بحث یہ ہے

$$(\text{سا} - ۱)\,\text{ا}^{\text{م}+۱}\left\{۱ + \text{سا}^{\text{م}+۱} + \text{سا}^{۲(\text{م}+۱)} + \ldots\ldots + \text{سا}^{(\text{ن}-۱)(\text{م}+۱)}\right\}$$

$$= (\text{سا} - ۱)\,\text{ا}^{\text{م}+۱}\,\frac{\text{سا}^{\text{ن}(\text{م}+۱)} - ۱}{\text{سا}^{\text{م}+۱} - ۱} = \left(\text{ب}^{\text{م}+۱} - \text{ا}^{\text{م}+۱}\right)\frac{\text{سا} - ۱}{\text{سا}^{\text{م}+۱} - ۱} \ldots\ldots(۵)$$

سا کو انتہا ایک کی طرف لانے سے ان چھوٹے حصوں کو لا انتہا کم کر دیا جا سکتا ہے، اور ن لا متناہی ہو جاتا ہے۔ اب چونکہ دفعہ ۲۲ کی رو سے

$$\underset{\text{سا}\to ۱}{\text{نہا}}\;\frac{\text{سا}^{\text{م}+۱} - ۱}{\text{سا} - ۱} = \text{م} + ۱ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(۶)$$

نتیجہ یہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ب}^{\text{م}+۱} - \text{ا}^{\text{م}+۱}}{\text{م} + ۱} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(۷)$$

اگر اس میں رکھیں $\text{م} = ۲$ تو اوپر کی مثال ا کی صورت حاصل ہوتی ہے۔

اوپر کا ذکی طرز عمل انگریزی ریاضی داں **والس** (۱۶۵۶) کا ہے، اِس میں ترمیم کی ضرورت ہے جبکہ $\text{م} = -۱$، اس صورت میں (۵) کی بجائے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ن}(\text{سا} - ۱) = \text{ن}\left\{\left(\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\right)^{\frac{۱}{\text{ن}}} - ۱\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(۸)$$

اِس کی انتہا جبکہ $\text{ن} \to \infty$ دفعہ ۴۳ (۹) کی رُو سے ہے $\text{لوک}\,\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ ......(۹)

مثال ۳۔ فرض کرو کہ منحنی $\text{ما} = \text{جب}\,\text{لا}$ ......(۱۰) ہے اور وسعت $\text{لا} = \text{عا}$ سے $\text{لا} = \text{با}$ تک ہے مساوی ذیلی حصے لینے سے $\text{ھ} = \frac{\text{با} - \text{عا}}{\text{ن}}$ ......(۱۱)

ذیل کے مجموعہ کی انتہا پر غور کرنا ہوگا

Σ = { جب (عہ + ھ/۲) + جب (عہ + ۳/۲ ھ) + ... + جب (بہ − ۳/۲ ھ)

+ جب (بہ − ھ/۲) } ھ ......(۱۲)

جہاں ہر وقفہ کے وسطیٰ پر جب لا کی قیمتیں لی گئی ہیں۔ اب ۲۰۴

(جب ھ/۲)/(ھ/۲) Σ = ۲ جب ھ/۲ جب (عہ + ھ/۲) + ۲ جب ھ/۲ جب (عہ + ۳/۲ ھ)

+ .... + ۲ جب ھ/۲ جب (بہ − ۳/۲ ھ) + ۲ جب ھ/۲ جب (بہ − ھ/۲)

= جم عہ − جم (عہ + ھ)

+ جم (عہ + ھ) − جم (عہ + ۲ ھ)

....

جم (بہ − ۲ ھ) − جم (بہ − ھ)

+ جم (بہ − ھ) − جم بہ

= جم عہ − جم بہ ....(۱۳)

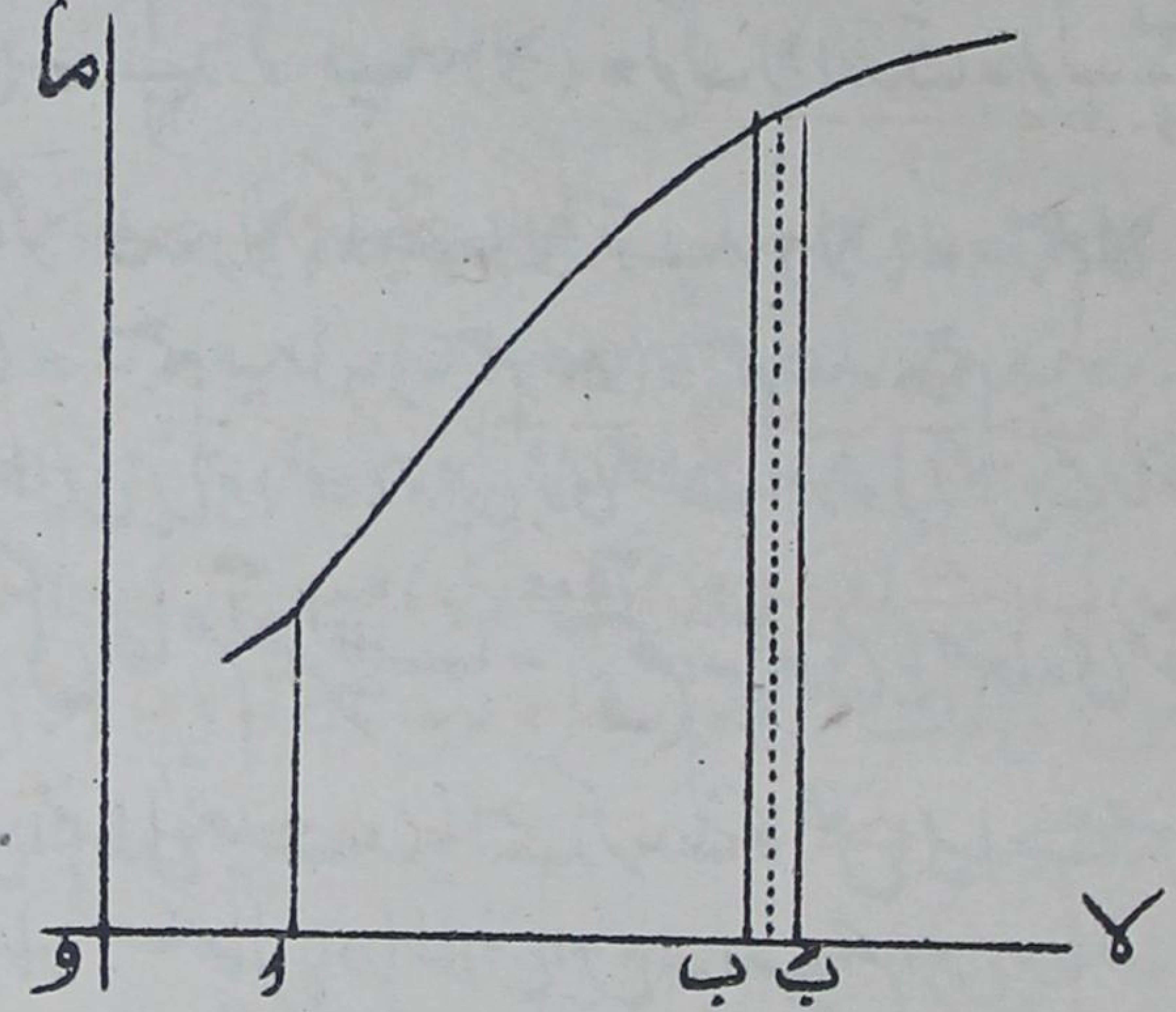
اس لئے انتہا کی طرف گذرنے سے (ھ ← ۰) مطلوبہ رقبہ ہے

جم عہ − جم بہ ....(۱۴)

۸۸ – مقلوب تفرق کے ساتھ تعلق۔ اوپر کی طرح کے حسابات تکملی احصا کے قاعدہ کی مدد سے عمل میں لائے جاتے ہیں، اسکی طرف اب ہم متوجہ ہوتے ہیں اگر ا کو ثابت رکھا جائے اور ب کو بدلا جائے تو دفعہ ۸۰ کا رقبہ ب کا تفاعل ہے اور یہ تفاعل صفر ہوتا ہے جبکہ ب = ا۔ اگر ب کو صغاری اضافہ مف ب دیا جائے تو رقبہ کا اضافہ آخرالامر ایک مستطیل کے رقبہ کے مساوی ہوگا جس کا عرض مف ب اور ارتفاع فہ (ب) ہے (دیکھو دفعہ ۵۴)۔ پس اگر رقبہ زیر بحث ق ہو تو

مف ق = فہ (ب) مف ب ....(۱)

یا $\dfrac{\text{فرق}}{\text{فرب}}$ = فہ (ب) ....(۲)



شکل ۴۵

اگر پہ (لا) ایک ایسا تفاعل ہو کہ پہ' (لا) = فہ (لا) یعنے پہ (لا)، فہ (لا) کا "نا محدود تکملہ" ہو تو

$\dfrac{\text{فرق}}{\text{فرب}}$ = پہ' (ب) ....(۳)

دفعہ ۵۶ سے حاصل ہوتا ہے کہ

ق = پہ (ب) + م ....(۴)

جہاں م مستقل ہے اور چونکہ ق صفر ہوتا ہے ب = ا کے لئے اسلئے لازماً ہونا چاہئے م = - پہ (ا) پس ق = پہ (ب) - پہ (ا) ....(۵)

گویا رقبہ معلوم کرنے کا سوال اس طرح نا محدود تکمل کے سوال میں بدل گیا جس پہ گزشتہ باب میں بحث کی گئی ہے۔

مثال ۱۔ اگر فہ (لا) = $\text{لا}^{\text{م}}$ تو پہ (لا) = $\dfrac{\text{لا}^{\text{م}+1}}{\text{م}+1}$ اور

$$ق = \frac{ب^{م+۱} - ا^{م+۱}}{م+۱}$$ سوائے اس صورت کے جبکہ م = -۱

اگر فہ (لا) = $\frac{۱}{لا}$ تو پہ (لا) = لوک لا اور ق = لوک $\frac{ب}{ا}$ .....(۷)

مثال ۲ - اگر فہ (لا) = جب لا تو پہ (لا) = - جم لا

اور ق = - جم ب - (- جم ا) = جم ا - جم ب .....(۸)

یہ نتائج ان کے مطابق ہیں جو دفعہ ۸۰ میں بڑی محنت اور طول عمل کے ساتھ حاصل ہوئے۔

۸۹ - تکملہ کی عام تعریف - ترقیم:-

چھوٹی یا صغاری مقداروں کے ایک سلسلہ کی انتہائی قیمت دریافت کرنے کا عمل ایسا ہے جس کے علم ہندسہ اور علم حیل میں بیشمار استعمال اور اطلاق ہیں۔ اب ہم اس پر باضابطہ طور پر بحث کرینگے اور ساتھ ہی ان امور کی طرف توجہ کرینگے جو محض نظری اہمیت رکھتے ہیں اور جن سے ابتک قطع نظر کی گئی ہے۔

فرض کرو کہ ما = فہ (لا)، لا کا تفاعل ہے اور اسکو ہم معلوم (اور اسلئے محدود) فرض کرتے ہیں ا سے ب تک (بشمول طرفین) لا کی تمام قیمتوں کے لئے۔ فرض کرو کہ سعت ب - ا کو وقفوں

ھ$_۱$، ھ$_۲$، ....ھ$_ن$ ....(۱)

کی کسی تعداد میں تقسیم کیا گیا ہے، ان سب وقفوں کی ایک ہی علامت ہے اور

ھ$_۱$ + ھ$_۲$ + ھ$_۳$ + ...+ ھ$_ن$ = ب - ا ....(۲)

۲۰۶ فرض کرو کہ ما$_۱$ ما کی ایک قیمت ہے جو ما وقفہ ھ$_۱$ میں اختیار کرتا ہے اور ما$_۲$ ایک قیمت ہے جو یہ وقفہ ھ$_۲$ میں اختیار کرتا ہے، علیٰ ہذا القیاس۔ اور فرض کرو کہ

ع = ما$_۱$ھ$_۱$ + ما$_۲$ھ$_۲$ + ...+ ما$_ن$ھ$_ن$ ....(۳)

اس حاصل جمع کی قیمت عام طور پر ایک توسعت ب - ا کے طریقہ تقسیم کے ساتھ بدلیگی اور دوسرے ان مختلف وقفوں (۱) کے اندر قیمتوں

و₁، و₂، و₃ ...... وₙ کے انتخاب پر۔ لیکن اگر یہ شرط عائد کردیجائے

کہ ان میں سے کوئی وقفہ بھی ایک مقررہ مقدار ک سے تجاوز نہیں کرسکتا تو بعض صورتوں میں ہم دیکھنگے [اور ان صورتوں میں اکثر ایسے تفاعلوں کے نمونے شامل ہونگے جن سے احصا کے استعمال کی ضمن میں واسطہ پڑتا ہے (اور کسی اور)] کہ ح کی قیمت ک کے کم ہونے کے ساتھ ایک معین انتہائی قیمت س کی طرف اس طور پر مائل ہوتی ہے کہ ک کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے اس امر کا یقین ہوسکتا ہے کہ ح کا تفاوت س سے کسی چھوٹی سے چھوٹی مقررہ مقدار کی نسبت کم ہوگا۔

جس مجموعہ کو ح سے تعبیر کیا گیا ہے اسے زیادہ تفصیل سے یوں بیان کرسکتے ہیں

ح (ا سے ب) و امف لا یا ح (ا سے ب) فہ (لاہ) مف لاہ ...... (۴)

جہاں مف لاہ کو لا کے اضافوں ھ₁، ھ₂ ..... ھₙ کے لئے استعمال کیا گیا ہے۔ جب اضافے مف لاہ تمام لا انتہا چھوٹے ہوتے ہیں اور اس لئے انکی تعداد لا انتہا بڑھتی ہے تو اس انتہائی قیمت کو (جبکہ اسکا وجود ہو) جسکی طرف یہ مجموعہ مستدق ہوتا ہے حدود ا اور ب کے درمیان فہ (لا) کا "محدود تکملہ" کہتے ہیں، اسے ہم

∫ (ا سے ب) و ما ز لاہ یا ∫ (ا سے ب) فہ (لا) فر لاہ ...... (۵) $\left[\int_{a}^{b} y\,dx\right]$

سے تعبیر کرینگے۔ اسی ترقیم کو اختیار کرنے سے عمل کی وہ منزلیں جن سے

انتہائی قیمت حاصل کی گئی تھی پیش نظر رہتی ہیں۔

ایسے سوالات جن میں (۳) جیسے مجموعہ کی انتہائی قیمت مطلوب ہوتی ہے علم ریاضی کی تقریباً ہر شاخ میں پائے جاتے ہیں۔ منحنی کے رقبہ پر پہلے بحث کی گئی ہے۔ اور دیگر سادہ مثالیں یہ ہیں۔ قوس کا طول جیسے اندرونی (یا بیرونی) کثیر الاضلاع کے محیط کی انتہا خیال کیا جائے، گردشی مجسم کا حجم وغیرہ۔ آٹھویں باب میں ان پر خاص طور پر بحث کی جائے گی۔

حرکیات میں، متغیر قوت کے دھکہ (Impulse) کی یہ تعریف کی گئی ہے کہ یہ وقت کے کسی وقفہ میں قوت کا "زمانی تکملہ" ہے یعنی اگر قوت ق وقت ت کا تفاعل خیال کیا جائے تو دھکہ وقفہ $ت_۱ - ت$ میں ذیل کے مجموعہ کی انتہائی قیمت ہے

$$ق_۱ ته_۱ + ق_۲ ته_۲ + \dots\dots + ق_ن ته_ن \quad \dots\dots\dots (۶)$$

۲۰۷ جہاں $ته_۱، ته_۲، \dots ته_ن$ وقفہ $ت_۱ - ت$ کے ذیلی حصے ہیں اس طور پر کہ

$$ته_۱ + ته_۲ + \dots\dots + ته_ن = ت_۱ - ت \quad \dots\dots\dots (۷)$$

اور $ق_۱، ق_۲، \dots\dots ق_ن$ ان وقفوں میں قوت کی قیمتیں ہیں۔
پس ہماری موجودہ ترقیم کے لحاظ سے دھکہ ہے

$$\int_{ت}^{ت_۱} ق\, ذت \quad \dots\dots\dots\dots\dots (۸)$$

+ نوٹ:۔ تکملہ $\int$ میں علامت $\int$ حرف s کی خاص صورت ہے، اسکو پہلے ریاضی والوں نے (Summation) حاصل جمع کی علامت کے لئے اختیار کیا۔ تکملی کی سعت کو اس طور پر ظاہر کرنے کا طریقہ فوریر کی ایجاد ہے۔

$\int_{ا}^{ب} فہ(لا)\, ذلا$ میں علامت $\int$ مجموعہ کا میسم (م) سمجھا جاسکتا ہے (مترجم)

نیوٹن کے دوسرے قانون حرکت کے مطابق کسی کمیت (ک) کے معیار کی تبدیلی اس دھکہ کے مساوی ہوتی ہے جو اسے لگتا ہے یا

$$\text{ک}\,\text{و}_{۱} - \text{ک}\,\text{و} = \int_{\text{ت}}^{\text{ت}_{۱}} \text{ق فرت} \qquad \text{(۹)}$$

جہاں و ، و۱ ابتدائی اور انتہائی رفتاریں ہیں۔

نیز متغیر قوت کا کام قوت کا مکانی تکملہ ہے۔ اگر قوت ق ، جسم کے مقام (س) کا تفاعل ہو تو س جیسے س. سے س۱ تک بدلتا ہے کام جو کیا گیا ہے وہ ہے

$$\int_{\text{س.}}^{\text{س}_{۱}} \text{ق فرس} \qquad \text{(۱۰)}$$

مثلاً گیس کی اکائی کمیت جب حجم ح. سے ح۱ تک پھیلتی ہے تو جو کام ہوتا ہے وہ

$$\int_{\text{ح.}}^{\text{ح}_{۱}} \text{د فرح} \qquad \text{(۱۱)}$$

ہے اگر حجم ح کے وقت دباؤ د ہو۔ اسے ہم دیکھ سکتے ہیں اگر گیس کو اکائی رقبہ کی تراش کے اسطوانہ میں، فشارہ کے ذریعہ بند کیا ہوا فرض کیا جائے تکملہ (۱۰) یا (۱۱) کی ترسیمی تعبیر اکثر اوقات عملیات میں استعمال کیجاتی ہے۔ مثلاً (۱۰) کی صورت میں اگر ایک منحنی بنایا جائے جس میں س فصلہ ہو اور ق معین تو کام اس رقبہ سے تعبیر ہوگا جو منحنی، س کے محور اور س. اور س۱ کے متناظر معینوں کے درمیان گھرا ہوا ہے یہ واٹ کی نمائندہ تصویر کا اصول ہے*۔

۹۰- استدقاق کا ثبوت - جب مجموعہ ے کی ایک

---

* ذیل کے حوالے ملاحظہ ہوں

Maxwell, Theory of Heat باب پنجم

Rankine, the Steam Engine دفعہ ۳۴

معین انتہائی قیمت ہو جیسا اوپر بیان ہوا تو فہ (لا) کو "قابل تکمل" کہا جاتا ہے۔ ✝

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ ہر مسلسل تفاعل اس مفہوم کے مطابق قابل تکمل ہے لیکن باضابطہ ثبوت کے مدنظر ہم اپنی توجہ صرف اس خاص صورت تک محدود رکھینگے جس میں متغیر متبوع کی وسعت محدود تعداد کے ایسے وقفوں میں منقسم ہو سکتی ہے جن میں سے ہر ایک میں تفاعل یا تو استقلال کے ساتھ بڑھتا ہے یا استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے۔ عملی نقطہ نظر سے یہ کافی ہوگا۔ (محدود ہونے کی قید کے علاوہ) کوئی اور قید عائد کرنے سے پہلے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ دو ثابت حدود مقرر کئے جا سکتے ہیں جن کے درمیان ح لازماً
۲۰۸ واقع ہوتا ہے۔ اگر وقفہ (ب - ا) کے اندر تفاعل فہ (لا) کی قیمتوں کی نچلی اور اوپر کی حدود (دفعہ ۷، ۱) لہ اور مہ ہوں تو ظاہر ہے کہ ح ذیل کے جملوں کے درمیان واقع ہوگا۔

لہ (ھ + ھ$_2$ + ... + ھ$_n$) = لہ (ب - ا)

اور مہ (ھ$_1$ + ھ$_2$ + ... + ھ$_n$) = مہ (ب - ا)

تخصیص کی خاطر اب ہم مان لیتے ہیں کہ ب > ا اور فہ (لا) استقلال کے ساتھ بڑھتا ہے جیسے لا، ا سے ب تک بڑھتا ہے۔
وقفہ (ب - ا) کی تقسیم کے کسی خاص طریقہ

ھ$_1$، ھ$_2$، ...... ھ$_n$ ...... (۱)

پر غور کرو اور فرض کرو کہ

ح = م$_1$ ھ$_1$ + م$_2$ ھ$_2$ + ... + م$_n$ ھ$_n$ ...... (۲)

✝ اس کے یہ معنی نہیں ہیں کہ تکملہ کے لئے ریاضی ضابطہ حاصل ہو سکتا ہے۔

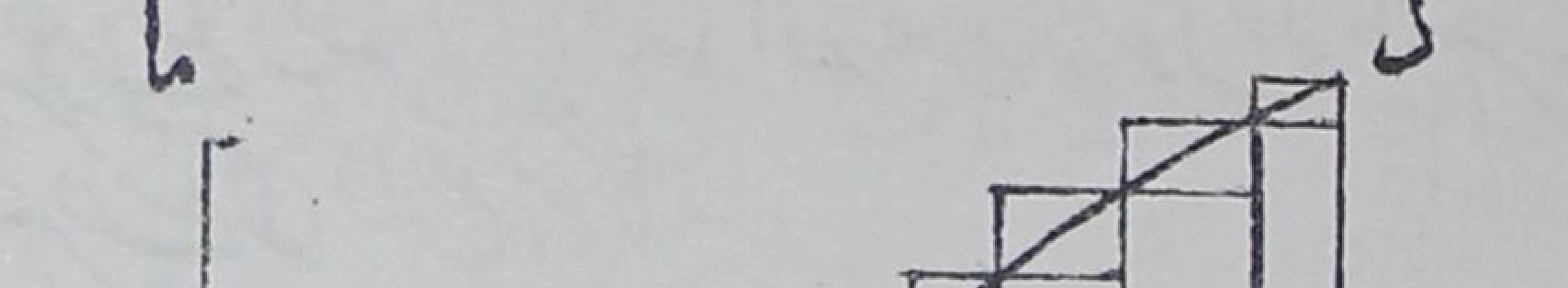
جہاں دفعہ ۸۹ کے مطابق مار کوئی قیمت ہے جو تفاعل وقفہ ھر میں اختیار کرتا ہے۔

اب (۲) میں ما۱، ما۲ .... مان کی بجائے تفاعل کی وہ قیمتیں رکھو جو اِن وقفوں کے شروع میں ہیں، اِس طرح کوئی رقم نہیں بڑھے گی۔ اگر محصلہ مجموعہ کو حَ سے تعبیر کیا جائے تو

ح ≮ حَ .... (۳)

اس کے بعد اگر ما۱، ما۲ .... مان کی بجائے تفاعل کی وہ قیمتیں درج کی جائیں جو بالترتیب اِن وقفوں کے آخر سروں پر ہیں تو کوئی رقم کم نہیں ہوگی۔ اس لئے محصلہ مجموعہ حً ہو تو

ح ≯ حً .... (۴)



شکل (۴۶)

شکل ۴۶ میں مقدار حَ ایسی مستطیلوں کے سلسلہ کا مجموعہ ہے جیسے ۲۰۹
پ ن اور حً ایسی مستطیلوں کا مجموعہ جیسے س ن۔ اس لئے فرق حً - حَ ایسی مستطیلوں کے مجموعہ سے تعبیر ہوتا ہے جیسے س ر۔ موخر الذکر مستطیلوں کے ارتفاعوں کا مجموعہ ک ب - ج ا یا فما(ب) - فما(ا) ہے، اگر ک بڑے سے بڑا قاعدہ ہو یا وقفوں (۱۱)

میں سے بڑے سے بڑا وقفہ ہو تو

جً - جَ ≯ ک [فہ(ب) - فہ(ا)] ..... (۵)

اب سعت (ب - ا) کی تقسیم کے تمام ممکن طریقوں پر غور کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مجموعات جَ کی جو ہمیشہ مہ(ب - ا) سے کم رہتے ہیں اوپر کی ایک انتہا ہوگی۔ اسے سَ سے تعبیر کرو اور مجموعات جً کی جو ہمیشہ لہ(ب - ا) سے بڑے رہتے ہیں ایک نچلی انتہا ہوگی جسے سً سے تعبیر کرو۔ نیز یہ ظاہر ہے کہ سً ≯ سَ۔ (۵) سے حاصل ہوتا ہے کہ فرق سً - سَ کو لازماً صفر اور ک {فہ(ب) - فہ(ا)} کے درمیان واقع ہونا چاہئے۔ اس بیان میں ک اتنا چھوٹا ہو سکتا ہے جتنا ہم چاہیں اس لئے ظاہر ہے کہ سَ اور سً مساوی ہوئے بغیر نہیں رہ سکتے۔ ان کی مشترک قیمت کو ہم س سے تعبیر کرینگے۔

آخر الامر یہ ظاہر ہے کہ

| ج - س | < جً - جَ < ک {فہ(ب) - فہ(ا)} .... (۶)

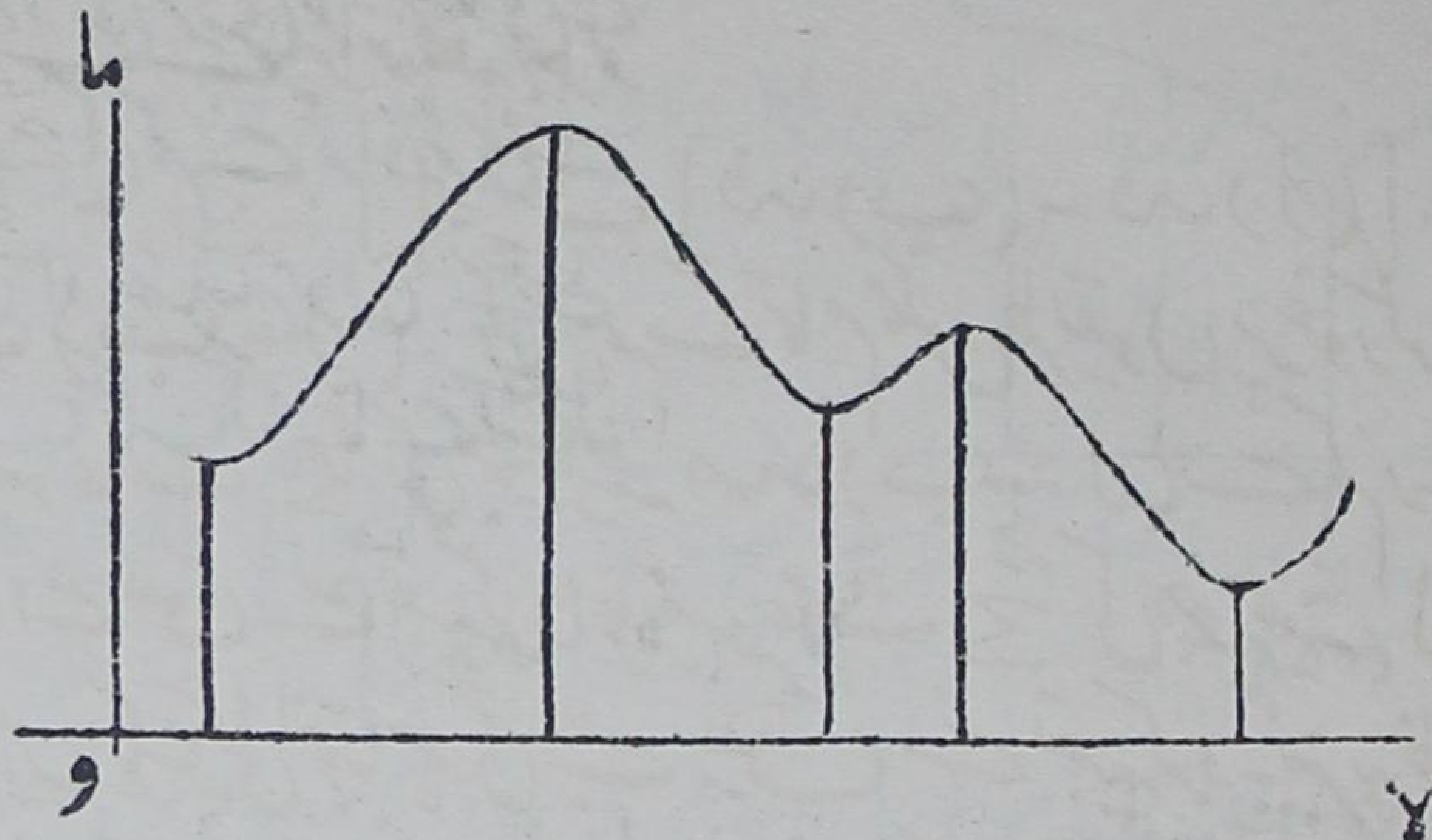
اس لئے ک کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے ہم اس امر کا پورا اطمینان کر سکتے ہیں کہ | ج - س | کسی مقررہ مقدار سے کم ہوگا خواہ یہ مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو۔*

اسی طرح کا ثبوت درست ہوگا اگر تفاعل فہ(ا) سعت (ب - ا) میں استقلال کے ساتھ گھٹے۔

اس لئے حاصل ہوتا ہے کہ آخری نتیجہ درست رہے گا اگر سعت کو ایسے چھوٹے وقفوں کی محدود تعداد میں توڑا جا سکے جن میں سے ہر ایک میں تفاعل یا تو استقلال کے ساتھ بڑھتا ہے یا استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے۔ دیکھو شکل ۴۷

---

* نیوٹن نے Principia, lib i ; Sec. i lemma iii. (1687) میں جو ثبوت دیا ہے یہ ثبوت اس کی توسیع ہے۔ تمام ہندسی تخیلات کو نکال کر استدلال کو محض تحلیلی شکل میں پیش کرنا آسان ہوگا۔



شکل (۴۷)

۱ - یہ فرض کرلیا گیا ہے کہ ب > ا - اگر ب < ا تو وقفے ۲۱۰
ھ۱، ھ۲ ...... ھن منفی ہونگے مگر استدلال میں اصولاً کوئی فرق نہیں آئیگا۔

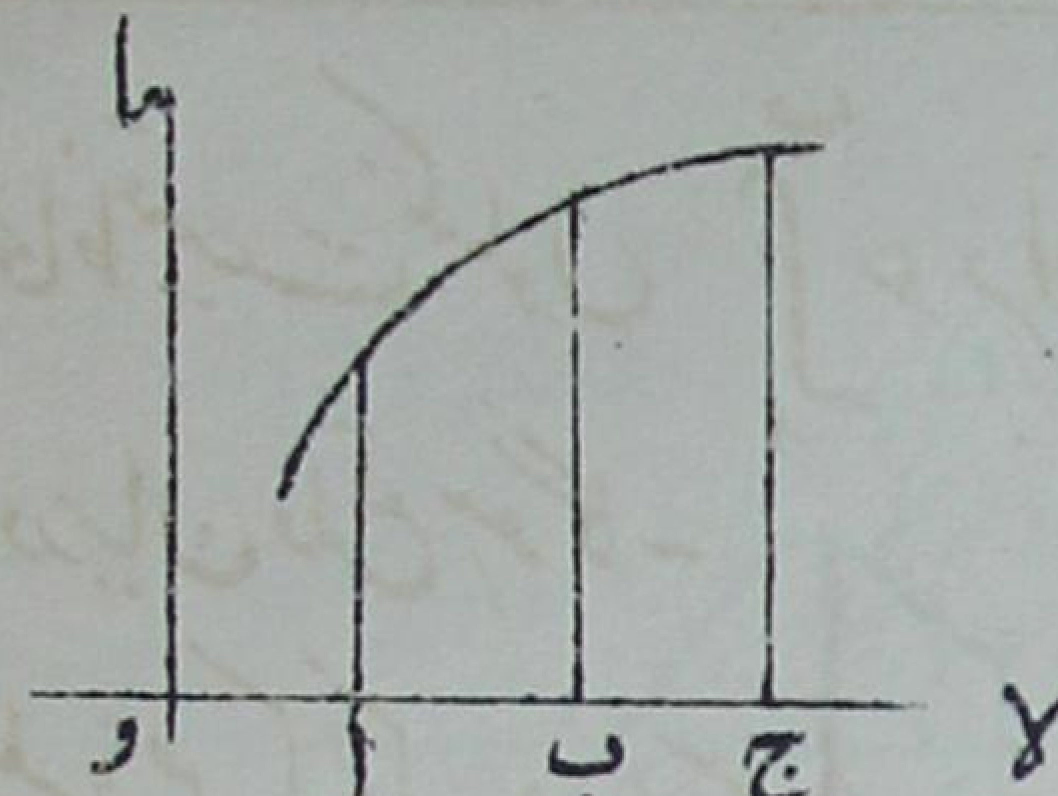
۹۱ - $\int_{ا}^{ب} فا(لا)\, فرلا$ کی خاصیتیں۔

(۱) اگر تکملوں $\int_{ا}^{ب} فا(لا)\, فرلا$ اور $\int_{ب}^{ا} فا(لا)\, فرلا$ کا باہم مقابلہ کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ دونوں تکملے ایک ہی مجموعہ کی انتہا خیال کئے جا سکتے ہیں، صرف اتنا فرق ہے کہ ایک صورت میں لا کے اضافے ھ۱، ھ۲ ...... ھن جن سے ملکر وقفہ ب - ا یا (ا - ب) بنتا ہے دوسری صورت کے اضافوں کے لحاظ سے متضاد علامت رکھتے ہیں۔

اسلئے $\int_{ب}^{ا} فا(لا)\, فرلا = - \int_{ا}^{ب} فا(لا)\, فرلا$ ......(۱)

(۲) نیز تعریف سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\int_{ا}^{ج} فا(لا)\, فرلا = \int_{ا}^{ب} فا(لا)\, فرلا + \int_{ب}^{ج} فا(لا)\, فرلا \quad ...(۲)$$



شکل (۴۸)

شکل ۴۸ سے اسکی ترسیمی توضیح ہوتی ہے

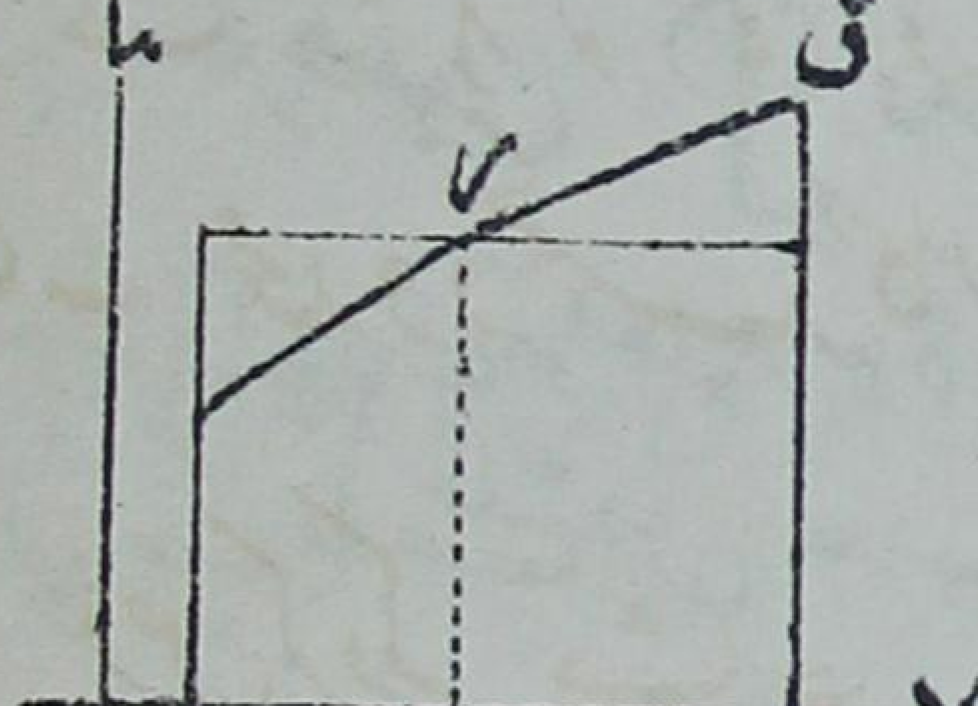
(۳) اگر فہ (لا) کی کم سے کم اور بڑی سے بڑی قیمتیں لہ اور مہ ہوں جبکہ لا، ا سے ب تک گذرتا ہے تو تکملہ

$$\int_{ا}^{ب} فہ(لا)\, فرلا$$

قیمتوں لہ (ب - ا) اور مہ (ب - ا) کے درمیان واقع ہوتا ہے اور اسلئے لازماً

$$یہ\,(ب - ا)$$

کے مساوی ہے جہاں لہ اور مہ کے درمیان مقدار یہ واقع ہے ۔
اگر فہ (لا) مسلسل ہو تو سعت (ب - ا) کے اندر یہ تفاعل وہ تمام قیمتیں اختیار کرتا ہے جو لہ، مہ کے درمیان واقع ہیں ۔ اسلئے ا اور ب کے درمیان لا کی کوئی ایک قیمت (ج) ضرور ایسی ہونی چاہئے کہ فہ (ج) = یہ



شکل (۴۹)

شکل ۴۹ کی ترسیمی تعبیر میں رقبہ ب ا ب ق اس مستطیل کے مساوی ہے جس کا قاعدہ ا ب ہے اور ارتفاع سعت ا ب کے ایک نقطہ ج کے معین کے مساوی ہے ۔ صریحاً ہم لکھ سکتے ہیں

$$ج = ا + طہ\,(ب - ا)$$

جہاں طہ کوئی مقدار ہے جو ۰ اور ۱ کے درمیان واقع ہے اس قرارداد کے مطابق ۲۱۱

$$\int_{ا}^{ب} فہ(لا)\, فرلا = (ب - ا)\, فہ\,[ا + طہ\,(ب - ا)] \;\ldots\ldots\; (۳)$$

(۴) زیادہ عام طور پر اگر ع، و، ما تین ایسے لا کے تفاعل ہوں کہ ا سے ب تک لا کی قیمتوں کے لئے

$$ع > ما > و \;\ldots\ldots\; (۴)$$

تو تکملہ

$$\int_{ا}^{ب} ما\, فرلا \;\ldots\ldots\; (۵)$$

بلحاظ قیمت تکملوں $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ ع فرلا اور $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ و فرلا .... (۶)

کے درمیان واقع ہوگا۔

پہلے فرض کرو کہ ب > ا۔ تب $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ ع فرلا − $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ ما فرلا = $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ (ع − ما) فرلا

(۴) کی رو سے اس مجموعہ کی ہر رقم جس کی انتہا آخری تکملہ ہے مثبت ہوگی۔ اس لئے

$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ ما فرلا < $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ ع فرلا .... (۷)

اور اسی طرح $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ ما فرلا > $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ و فرلا .... (۸)

اگر ب < ا تو (۷) اور (۸) کی نامساواتیں الٹ جائینگی۔

۹۲- محدود تکملہ کا تفرق اسکی کسی حد کے لحاظ سے۔

فرض کرو کہ ت = $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ فہ (لا) فرلا .... (۱)

صریحاً ت "تکمل کے حدود" ا، ب کا تفاعل ہے اور عام طور پر بدلیگا جبکہ انمیں سے کوئی ایک بدلے۔ ا کو ثابت مان کر ت کا مشتق تفاعل بلحاظ اوپر کی حد کے مرتب کرو اس طرح

ت + مف ت = $\int_{\text{ا}}^{\text{ب + مف ب}}$ فہ (لا) فرلا = $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ فہ (لا) فرلا + $\int_{\text{ب}}^{\text{ب + مف ب}}$ فہ (لا) فرلا

(۲) ....

دفعہ ۹۱، (۲) کی رو سے۔ اس لئے

مف ت = $\int_{ب}^{ب + مف ب}$ فہ (لا) فرلا = مف ب فہ (ب + طہ مف ب) ....(۳)

۲۱۲ دفعہ ۹۱، (۳۳) کی رو سے - اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مف ت، مف ب کے ساتھ معدوم ہوتا ہے یعنی ت، ب کا مسلسل تفاعل ہے -

نیز چونکہ (مف ت) / (مف ب) = فہ (ب + طہ مف ب) ......(۴)

انتہا مف ب ← ۰ لینے سے

(فرت) / (فرب) = فہ (ب) ....(۵)

اسی طرح اگر اوپر کی حد ب کو ثابت رکھکر نچلی حد ا کو بدلا جائے تو ت، ا کا مسلسل تفاعل ہوگا اور

(فرت) / (فرا) = - فہ (ا) ....(۶)

۹۳ - **نامحدود تکملہ کا وجود** - اب ہم دکھا سکتے ہیں کہ کوئی تفاعل فہ (لا) جسکی نوعیت وہ ہو جو دفعہ ۹۰ میں بیان کی گئی ہے، ایک نامحدود تکملہ رکھتا ہے یعنی ایک ایسے قابل تعین (ضروری نہیں کہ یہ محسوب بھی ہوسکے) تفاعل پہ (لا) کا وجود ہے کہ

پہ' (لا) = فہ (لا) ....(۱)

یا پہ (لا) = عف' فہ (لا) ....(۲)

کیونکہ اگر لکھا جائے پہ (ضہ) = $\int_{ا}^{ضہ}$ فہ (لا) فرلا ....(۳)

تو بائیں جانب کا جملہ، دفعہ ۹۰ کی رو سے، ضہ کا ایک قابل تعین تفاعل ہے اور اوپر کی تحقیق سے واضح ہے کہ اس شرط کو پورا کرتا ہے

پہ' (ضہ) = فہ (ضہ) ....(۴)

موجودہ نقطہ نظر سے (۳) میں تکمل کی نچلی حد اختیاری ہے اور اس لئے تفاعل پہ (ضہ) جمع شدنی مستقل کی حد تک ناقابل تعین ہے کیونکہ دفعہ ۹۱' (۲) کی رو سے (۳) میں نچلی حد کے طور پر ر کی بجائے رَ درج کرنا گویا بائیں جانب تکملہ

$$\int_{\text{رَ}}^{\text{ر}} \text{فہ}\,(\text{لا})\,\text{فرلا}$$

کا جمع کر دینا ہے۔ مقابلہ کرو دفعہ ۷۲ کے ساتھ۔

۹۴۔ محدود تکملہ کے محسوب کرنیکا قاعدہ۔

جب کبھی پہ (لا) کی تحلیلی شکل معلوم ہو جس کا پہلا مشتق فہ (لا) ہے تو محدود تکملہ

$$\text{ت} = \int_{\text{ر}}^{\text{ب}} \text{فہ}\,(\text{لا})\,\text{فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

کی قیمت فوراً لکھی جا سکتی ہے۔ کیونکہ اگر ر کو ثابت رکھا جائے تو دفعہ ۹۲ کی رو سے ۲۱۳

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرب}} = \text{فہ}\,(\text{ب}) = \text{پہ}'\,(\text{ب}) \quad \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

بموجب فرض۔ دفعہ ۵۶ سے حاصل ہوتا ہے کہ ت اور پہ (ب) صرف "ایک مستقل" کے لحاظ سے متفاوت ہو سکتے ہیں یعنی ان میں فرق صرف ایک مستقل مقدار کا ہو سکتا ہے جو ب پر منحصر نہ ہو۔ پس

$$\int_{\text{ر}}^{\text{ب}} \text{فہ}\,(\text{لا})\,\text{فرلا} = \text{پہ}\,(\text{ب}) + \text{م} \quad \ldots\ldots\ldots\ (3)$$

م چونکہ ب پر منحصر نہیں اسلئے م معلوم کرنیکے لئے رکھو ب = ر جس سے

$$\text{پہ}\,(\text{ر}) + \text{م} = \int_{\text{ر}}^{\text{ر}} \text{فہ}\,(\text{لا})\,\text{فرلا} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ (4)$$

اس لئے م = - پہ (ر) اور

$$\int_{ا}^{ب} فہ(لا)\, فرلا = پہ(ب) - پہ(ا) \quad ......(۵)$$

تکملی احصا کا یہ بنیادی مسئلہ ہے۔ اس سے کسی معلومہ تفاعل فہ(لا) کے محدود تکملہ کی قیمت دریافت کرنے کا مسئلہ مقلوب تفاعل پہ(لا) یا عفتاً فہ(لا) کے حاصل ہونے پر مبنی ہوتا ہے۔ اب اسکی وجہ ظاہر ہے کہ اس مقلوب تفاعل کو اس شکل

$$\int فہ(لا)\, فرلا \quad ....(۶)$$

سے کیوں تعبیر کرتے ہیں۔ (۶) صرف $\int^{لا} فہ(لا)\, فرلا$ ......(۷)

کا اختصار ہے جہاں ا اختیاری ہے۔ ہم پہلے دیکھ چکے ہیں کہ ا میں کوئی تبدیلی محض مستقل کو بدل دینے کے مرادف ہے۔

ترقیم $\Big[پہ(ب)\Big]_{ا}^{ب}$ ....(۸)

کو اکثر اوقات اختصار کے طور پر پہ(ب) - پہ(ا) کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

مثال ۱۔ $\int_{ا}^{ب} قو^{ک لا}\, فرلا$ ....(۹)

یہاں $فہ(لا) = قو^{ک لا}$، $پہ(لا) = \frac{1}{ک}\, قو^{ک لا}$

پس $\int_{ا}^{ب} قو^{ک لا}\, فرلا = \frac{1}{ک}\left(قو^{ک ب} - قو^{ک ا}\right)$ ......(۱۰)

مثال ۲۔ $\int_{0}^{\frac{ط}{2}} جب^{2} لا\, فرلا$ ....(۱۱) ۲۱۴

یہاں $فہ(لا) = جب^{2} لا$، $پہ(لا) = \frac{1}{2} لا - \frac{1}{4} جب ۲لا$

پس $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جب لا فر لا $= \frac{\pi}{4}$ .... (۱۲)

۹۵- وہ صورتیں جہاں تفاعل فہ (لا) یا تکمل کے حدود لامتناہی ہو جاتے ہیں-

اور مثالوں پر غور کرنے سے پیشتر دفعہ ۹۱ کے تکملہ کی تعریف کو ذرا وسیع کرنا مناسب ہوگا۔ وہاں یہ مان لیا گیا تھا کہ تکمل کے حدود ا، ب محدود ہیں اور تفاعل فہ (لا) تمام وسعت ب - ا میں محدود ہے۔

اب ہم دیکھینگے کہ بعض حالات میں اِن شرائط کو ذرا ڈھیلا کر دینا کیسے ممکن ہے۔

(آ) فرض کرو کہ فہ (لا)، لا کی تمام محدود قیمتوں کے لئے محدود اور مسلسل ہے۔

تکملہ $\int_{ا}^{صہ}$ فہ (لا) .... (۱)

پر غور کرو جہاں صہ > ا۔ اگر صہ کو لاانتہا بڑھانے سے تکملہ ایک معین انتہائی قیمت کی طرف مائل ہو تو اس انتہائی قیمت کو تکملہ

$\int_{ا}^{\infty}$ فہ (لا) فر لا .... (۲)

سے تعبیر کرتے ہیں اور تکملہ (۱) کو صہ ← ∞ کے لئے "مستدق" کہا جاتا ہے۔ جیسا کہ لامتناہی سلسلوں کے نظریہ سے یہ توقع کیجا سکتی ہے (دفعہ ۵) استدقاق کے لئے یہ کافی شرط نہیں ہے کہ

$\lim\limits_{لا \to \infty}$ فہ (لا) = ۰ .... (۳)

نیز یہ شرط ضروری بھی نہیں ہے کیونکہ استدقاق اس صورت میں بھی ممکن ہو سکتا ہے جبکہ لا ← ∞ کے لئے فہ (لا) کی کوئی معین انتہائی قیمت نہ ہو۔

اسی طرح کی تعریف $\int_{-\infty}^{ب}$ فہ (لا) فر لا .... (۴)

کے لئے بھی مرتب ہو سکتی ہے۔

(۴) فرض کروکہ فہ (لا) لامتناہی ہوجاتا ہے تکمل کے حدود پر یا ان کے درمیان۔

صرف اُس صورت پر غور کرنا کافی ہوگا جہاں لا کی صرف ایک قیمت ہو جس کے لئے فہ (لا) ← ∞ ۔ عام صورت اس صورت میں تحویل ہو سکتی ہے اگر وسعت ب - ا کو چھوٹے وقفوں میں توڑ دیا جائے*۔ ۲۱۵

اگر فہ (لا) (صرف) اوپر کی حد پر لامتناہی ہوتا ہو تو ہم سب سے پہلے تکملہ

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب - صہ}} \text{فہ (لا) فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

پر غور کرتے ہیں جہاں صہ مثبت ہے۔ اگر صہ کو لاانتہا کم کرنے سے تکملہ ایک معین انتہائی قیمت کی طرف مائل ہو تو اس قیمت کو ہم تکملہ

$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ (لا) فرلا}$ کی تعریف قرار دیتے ہیں۔

اسی طرح کی تعریف اُس صورت پر حاوی ہوگی جہاں فہ (لا) نچلی حد ا پر لامتناہی ہوتا ہے۔

اگر فہ (لا) حدود ا، ب کے درمیان لامتناہی ہوتا ہو مثلاً لا = ج کے لئے تو ہم اس مجموعہ پر غور کرتے ہیں

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ج - صہ}} \text{فہ (لا) فرلا} + \int_{\text{ج + صَہ}}^{\text{ب}} \text{فہ (لا) فرلا} \quad \ldots\ldots (۶)$$

اگر صہ (اور صَہ) کے کم کرنے سے ان میں سے ہر ایک تکملہ ایک معین انتہائی قیمت کی طرف مائل ہو تو ان قیمتوں کے مجموعہ کو تکملہ

* یہ مان لیا جاتا ہے کہ فہ (لا) اکیلے نقطوں کی محدود تعداد پر ہی لامتناہی ہوتا ہے۔

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ (لا) فرلا} \qquad \ldots\ldots (۷)^{+}$$

کی تعریف کے طور پر اختیار کر لیا جاتا ہے۔

جب، فہ (لا) تنہا نقطوں کی محدود تعداد پر لا متناہی یا غیر مسلسل ہو تو ایسی صورتوں کا استعمال یوں ہو سکتا ہے کہ وسعت کو ایسے چھوٹے وقفوں میں تقسیم کیا جائے جن کا نقاط غیر تسلسل احاطہ کریں۔

مثال ۱۔ $\int_{\text{.}}^{\text{سہ}} \text{قو}^{-\text{عہ لا}}\ \text{فرلا} = \left[-\frac{1}{\text{عہ}}\text{قو}^{-\text{عہ لا}}\right]_{\text{.}}^{\text{سہ}} = \frac{1-\text{قو}^{-\text{عہ سہ}}}{\text{عہ}} \ldots\ldots (۸)$

جیسے سہ بڑھتا ہے یہ جملہ انتہا $\frac{1}{\text{عہ}}$ کی طرف مائل ہوتا ہے۔ اس لئے

$$\int_{\text{.}}^{\infty} \text{قو}^{-\text{عہ لا}}\ \text{فرلا} = \frac{1}{\text{عہ}} \qquad \ldots\ldots (۹)$$

مثال ۲۔ $\int_{1}^{\text{سہ}} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \left[\text{لوک لا}\right]_{1}^{\text{سہ}} = \text{لوک سہ} \ldots\ldots (۱۰)$ ۲۱۶

یہ سہ کے ساتھ لا انتہا بڑھتا ہے۔ اس لئے سہ ← ∞ کے لئے کوئی انتہائی قیمت نہیں ہے اگرچہ

$$\underset{\text{لا} \to \infty}{\text{نہا}} \frac{1}{\text{لا}} = 0 \qquad \ldots\ldots (۱۱)$$

+ ایسی صورتیں پیدا ہو سکتی ہیں جہاں ذیل کا ہر ایک تکملہ

$$\int^{\text{ج}-\text{صہ}} \text{فہ (لا) فرلا} \quad \text{اور} \quad \int_{\text{ج}+\text{صہ}}^{\text{ب}} \text{فہ (لا) فرلا}$$

آخر لا متناہی ہو لیکن اگر کوئی خاص رشتہ انتہا میں صفر ہونے والی مقداروں صہ، صہ پر عائد کیا جائے تو ان دو تکملوں کے لا متناہی جزو اس طور پر ایک دوسرے کو خارج کر سکتے ہیں کہ مجموعہ محدود رہے۔ رشتہ مذکورہ اگر صہ = صہ ہو تو نتیجہ محصلہ کو جب اسکا وجود ہو کوشی (Cauchy) نے تکملہ (۷) کی "صدری قیمت" کہا ہے۔

مثال ۳- $\int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا} - \text{لا}}}$ .... (۱۲)

تفاعل $\frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا} - \text{لا}}}$ لامتناہی ہو جاتا ہے لا ← ا کے لئے۔ لیکن

$\int_{\text{ب}}^{\text{ا-صہ}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا} - \text{لا}}} = \left[-\text{۲}\sqrt{\text{ا} - \text{لا}}\right]_{\text{ب}}^{\text{ا-صہ}} = \text{۲} - \text{۲}\sqrt{\text{صہ}}$ .... (۱۳)

اور جیسے صہ لامتناہی طور پر کم ہوتا ہے یہ جملہ انتہا ۲ کی طرف مائل ہوتا ہے۔

اس لئے $\int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا} - \text{لا}}} = \text{۲}$ .... (۱۴)

مثال ۴- $\int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \text{لوک لا فرلا}$ .... (۱۵)

$\int_{\text{صہ}}^{\text{ا}} \text{لوک لا فرلا} = \left[\text{لا لوک لا} - \text{لا}\right]_{\text{صہ}}^{\text{ا}}$ .... (۱۶)

لیکن دفعہ ۴۴ (۲) سے $\text{نہا}_{\text{صہ} \to \text{ب}} \text{ صہ لوک صہ} = \text{ب}$۔

اس لئے $\int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \text{لوک لا فرلا} = -\text{ا}$ .... (۱۷)

۹۶- دفعہ ۹۴ کے قاعدہ کا استعمال۔

محدود تکملوں کی قیمتیں دریافت کرنے کے چند اور تمثیلی سوال درج کئے جاتے ہیں

مثال ۱- $\int_{\text{ب}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب لا فرلا} = \left[-\text{جم لا}\right]_{\text{ب}}^{\frac{\pi}{2}} = \text{ا}$ .... (۱)

$\int_{\text{ب}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم لا فرلا} = \left[\text{جب لا}\right]_{\text{ب}}^{\frac{\pi}{2}} = \text{ا}$ .... (۲)

$\int_{\text{ب}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب لا جم لا فرلا} = \left[\frac{\text{ا}}{\text{۲}} \text{جب}^{\text{۲}} \text{لا}\right]_{\text{ب}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ ...... (۳)

مثال ۲ - دفعہ ۸۰ کی رو سے

$$\int_{\text{۰}}^{\text{س}} \text{فو}^{-\text{عہ لا}}\,\text{جب بہ لا فر لا} = \left[-\frac{\text{عہ جب بہ لا} + \text{بہ جم بہ لا}}{\text{عہ}^2+\text{بہ}^2}\,\text{فو}^{-\text{عہ لا}}\right]_{\text{۰}}^{\text{س}}$$

$$= \frac{\text{بہ}}{\text{عہ}^2+\text{بہ}^2} - \frac{\text{عہ جب بہ س} + \text{بہ جم بہ س}}{\text{عہ}^2+\text{بہ}^2}\,\text{فو}^{-\text{عہ س}}$$

۲۱۷ اگر عہ مثبت ہو تو جیسے س لامتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے آخری رقم اپنی انتہائی قیمت صفر کی طرف مائل ہوتی ہے۔ اس لئے

$$\int_{\text{۰}}^{\infty} \text{فو}^{-\text{عہ لا}}\,\text{جب بہ لا فر لا} = \frac{\text{بہ}}{\text{عہ}^2+\text{بہ}^2} \quad \ldots\ldots (\text{۴})$$

اسی طرح

$$\int_{\text{۰}}^{\infty} \text{فو}^{-\text{عہ لا}}\,\text{جم بہ لا فر لا} = \frac{\text{عہ}}{\text{عہ}^2+\text{بہ}^2} \quad \ldots\ldots (\text{۵})$$

مثال ۳ -

$$\int_{\text{۰}}^{\text{س}} \frac{\text{فر لا}}{1+\text{لا}^2} = \left[\text{مس}^{-1}\text{لا}\right]_{\text{۰}}^{\text{س}} = \text{مس}^{-1}\text{س} - \text{مس}^{-1}\text{۰}$$

تفاعل $\text{مس}^{-1}\text{لا}$ کثیر القیمت تفاعل ہے (دفعہ ۱۶) لیکن یہ چنداں اہمیت نہیں رکھتا کہ کونسی قیمت لی جائے بشرطیکہ ہم یہ فرض کرلیں کہ یہ یکساں طور پر بدلتا ہے جیسے لا تکمل کی سعت میں سے گذرتا ہے۔ اس لئے اگر لیا جائے $\text{مس}^{-1}\text{۰} = \text{۰}$ تو $\text{مس}^{-1}\text{س}$ سے وہ قیمت مراد ہوگی جو یکساں طور پر ۰ سے س تک بڑھتی ہے۔ جب س لا انتہا بڑھتا ہے تو یہ قیمت انتہا $\frac{\pi}{2}$ کی طرف مائل ہوتی ہے

اسلئے

$$\int_{\text{۰}}^{\infty} \frac{\text{فر لا}}{1+\text{لا}^2} = \frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۶})$$

مثال ۴ - دفعہ ۷۸ (۴) کی رو سے

$$\int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{فر طہ}}{\text{عہ جب}^2\text{طہ} + \text{بہ جم}^2\text{طہ}} = \left[\frac{1}{\sqrt{\text{عہ بہ}}}\,\text{مس}^{-1}\left(\sqrt{\frac{\text{عہ}}{\text{بہ}}}\,\text{مس طہ}\right)\right]_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{2}}$$

اب جیسے طہ ۰ سے $\frac{\pi}{2}$ تک بڑھتا ہے، $\sqrt{\frac{\text{عہ}}{\text{بہ}}}$ مس طہ صفر سے ∞ تک

بڑھتا ہے اور اسلئے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ $\text{مس}^{-1}\left[\sqrt{\frac{\text{عہ}}{\text{بہ}}}\ \text{مس طہ}\right]$ صفر سے $\frac{\pi}{2}$ تک بڑھتا ہے۔

$$\text{اس لئے}\quad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{فرطہ}}{\text{عہ جب}^{2}\text{طہ} + \text{بہ جم}^{2}\text{طہ}} = \frac{\pi}{2\sqrt{\text{عہ بہ}}} \quad ......(۷)$$

طالب علم نے گذشتہ باب کی ضمن میں دیکھا ہوگا کہ جب متغیر کے بدلنے سے "نامحدود تکمل" عمل میں لایا جاتا ہے (دفعات ۷۷، ۷۹) تو عمل کا نہایت تکلیف دہ حصہ وہ ہوتا ہے جس میں ابتدائی متغیر کی طرف عود کیا جاتا ہے۔ جب معلومہ حدود کے درمیان محدود تکملہ دریافت کرنا مقصود ہو تو عمل کا یہ حصہ غیر ضروری ہوتا ہے اور نامحدود تکملہ حاصل کر کے اس میں نئے حدود درج کر دینا کافی ہوتا ہے۔

مثال ۵۔ $\int_{0}^{\text{ا}} \sqrt{\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}}\ \text{فرلا}$ کو معلوم کرو۔

دفعہ ۷۹ میں لا = ا جب طہ رکھنے سے حاصل ہوا

$$\int \sqrt{\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}}\ \text{فرلا} = \text{ا}^{2}\int \text{جم}^{2}\text{طہ فرطہ} = \frac{1}{2}\text{ا}^{2}\left(\text{طہ} + \frac{1}{2}\text{جب ۲طہ}\right)$$

اب اگر طہ، ۰ سے $\frac{\pi}{2}$ تک بدلتا تو لا، ۰ سے ا تک بدلتا۔ اسلئے

$$\int_{0}^{\text{ا}} \sqrt{\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}}\ \text{فرلا} = \frac{1}{2}\text{ا}^{2}\left[\text{طہ} + \frac{1}{2}\text{جب ۲طہ}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\pi\,\text{ا}^{2} \quad ....(۹)$$

۲۱۸ **۹۷۔ تحویلی ضابطے۔** دفعات ۸۱، ۸۲ کے طریقے جب محدود تکملوں کی تحویل میں استعمال کئے جاتے ہیں تو تکمل شدہ رقوم کے دونوں حدود پہ صفر ہو جانے سے خاص طور پر سادہ نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

(۱) اگر $\text{ع}_{\text{ن}} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{\text{ن}}\text{طہ فرطہ} \quad ....(۱۰)$

تو دفعہ ۸۲ (۲) کی رو سے

$$\text{ع}_{\text{ن}} = \left[\frac{۱}{\text{ن}}\,\text{جب طہ جم}^{\text{ن}-۱}\,\text{طہ}\right]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} + \frac{\text{ن}-۱}{\text{ن}}\,\text{ع}_{\text{ن}-۲} \quad \ldots(۲)$$

اگر ن > ۱ تو پہلا حصہ صفر ہو جاتا ہے کیونکہ جب ۰ = ۰، جم $\frac{\pi}{۲}$ = ۰۔

اس لئے $$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{\text{ن}}\,\text{طہ فرطہ} = \frac{\text{ن}-۱}{\text{ن}} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{\text{ن}-۲}\,\text{طہ فرطہ} \quad \ldots(۳)$$

اسی طرح سے دفعہ ۸۲ (۶) کی رو سے

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{\text{ن}}\,\text{طہ فرطہ} = \frac{\text{ن}-۱}{\text{ن}} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{\text{ن}-۲}\,\text{طہ فرطہ} \quad \ldots(۴)$$

اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو (۳) کے متواتر استعمال سے

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{\text{ن}}\,\text{طہ فرطہ}$$

کو $$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم طہ فرطہ} = ۱ \quad \text{یا} \quad \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{فرطہ} = \frac{\pi}{۲} \quad \ldots\ldots(۵)$$

کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے بموجب اس کے کہ ن طاق ہے یا جفت۔

اسی طرح سے $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{\text{ن}}\,\text{طہ فرطہ}$ کو

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب طہ فرطہ} = ۱ \quad \text{یا} \quad \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{فرطہ} = \frac{\pi}{۲} \quad \ldots\ldots(۶)$$

پر منحصر کیا جاسکتا ہے۔

مثال ۱۔ $$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{۵}\,\text{طہ فرطہ} = \frac{۴}{۵} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{۳}\,\text{طہ فرطہ}$$

$$= \frac{۴}{۵} \times \frac{۲}{۳} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم طہ فرطہ} = \frac{۸}{۱۵}$$

اس طور پر دو تین مثالیں حل کرنے کے بعد طالب علم نتیجہ کے متواتر اجزاء ضربی کو زبانی ۲۱۶

لکھہ سکیگا، مثلاً

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{6}\,\text{طہ}\;\text{فرطہ} = \frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{5}{32}\pi$$

اوپر کے شکلوں کی عام قیمتیں آسانی سے لکھی جا سکتی ہیں۔ مثلاً اگر ن طاق ہو تو

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{\text{ن}}\,\text{طہ}\;\text{فرطہ} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{ن}}\,\text{طہ}\;\text{فرطہ} = \frac{(\text{ن}-1)(\text{ن}-3)\times\cdots\times 2}{\text{ن}(\text{ن}-2)\times\cdots\times 3} \;\ldots\ldots(7)$$

لیکن اگر ن جفت ہو تو

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{\text{ن}}\,\text{طہ}\;\text{فرطہ} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{ن}}\,\text{طہ}\;\text{فرطہ} = \frac{(\text{ن}-1)(\text{ن}-3)\times\cdots\times 1}{\text{ن}(\text{ن}-2)\times\cdots\times 2}\times\frac{\pi}{2}$$

$$\ldots\ldots\ldots(8)$$

اس نمونہ کے تکملے احصا کے طبعی استعمال میں اکثر واقع ہوتے ہیں۔

(۲) اگر $\text{ع}_{\text{م،ن}} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{م}}\,\text{طہ}\;\text{جم}^{\text{ن}}\,\text{طہ}\;\text{فرطہ} \;\ldots\ldots\ldots(9)$

تو دفعہ ۸۲ (۱۰) کی رو سے

$$\text{ع}_{\text{م،ن}} = \left[\frac{1}{\text{م}+\text{ن}}\,\text{جب}^{\text{م}+1}\,\text{طہ}\;\text{جم}^{\text{ن}-1}\,\text{طہ}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\text{ن}-1}{\text{م}+\text{ن}}\,\text{ع}_{\text{م،ن}-2} \;\ldots\ldots(10)$$

اگر ن > ۱ تو [ ] کے اندر کا جملہ دونوں حدود پر معدوم ہوتا ہے۔ اس طرح

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{م}}\,\text{طہ}\;\text{جم}^{\text{ن}}\,\text{طہ}\;\text{فرطہ} = \frac{\text{ن}-1}{\text{م}+\text{ن}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{م}}\,\text{طہ}\;\text{جم}^{\text{ن}-2}\,\text{طہ}\;\text{فرطہ} \;\ldots\ldots(11)$$

اسی طرح دفعہ ۸۲ (۱۱) سے حاصل ہوتا ہے، اگر م > ۱

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{م}}\,\text{طہ}\;\text{جم}^{\text{ن}}\,\text{طہ}\;\text{فرطہ} = \frac{\text{م}-1}{\text{م}+\text{ن}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{م}-2}\,\text{طہ}\;\text{جم}^{\text{ن}}\,\text{طہ}\;\text{فرطہ} \;\ldots\ldots(12)$$

ان ضابطوں کے ذریعہ کوئی سا قوت نما بھی بقدر ۲ کے کم کیا جا سکتا ہے اور اس عمل کی تکرار سے تکملہ (۹) اپنے تکملہ پر آ کے منحصر ہو سکتا ہے جس میں قوت نما ۱ یا صفر ہے بشرطیکہ م، ن مثبت صحیح عدد ہوں۔ آخر الامر حاصل میں ذیل کی کوئی نہ کوئی صورت واقع ہو گی

$$\left.\begin{array}{l} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب طہ جم طہ فرطہ} = \frac{1}{2} \quad ، \quad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{فرطہ} = \frac{\pi}{2} \\ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب طہ فرطہ} = 1 \quad ، \quad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم طہ فرطہ} = 1 \end{array}\right\} \cdots\cdots (13)$$

مثال ۲ - $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{5}\text{ طہ جم}^{3}\text{ طہ فرطہ} = \frac{4}{8} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{3}\text{ طہ جم}^{3}\text{ طہ فرطہ}$ ۲۲۰

$$= \frac{4}{8} \times \frac{2}{6} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب طہ جم}^{3}\text{ طہ فرطہ}$$

(۱۲) کی رو سے - نیز (۱۱) سے

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب طہ جم}^{3}\text{ طہ فرطہ} = \frac{2}{4} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب طہ جم طہ فرطہ} = \frac{2}{4} \times \frac{1}{2}$$

اس لئے $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{5}\text{ طہ جم}^{3}\text{ طہ فرطہ} = \frac{4}{8} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$

تھوڑی مشق کے بعد جواب فوراً لکھا جا سکیگا - مثلاً

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{6}\text{ طہ جم}^{2}\text{ طہ فرطہ} = \frac{5}{8} \times \frac{3}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{5}{256}\pi$$

ضابطوں (۱۱) اور (۱۲) نیز (۳) اور (۴) کی عملی مشقوں میں ضرورت ہوتی ہے - ان کو یاد رکھنا مناسب ہے -

نیز جبری تکملہ $\int_{0}^{1} \text{لا}^{\text{م}} (1 - \text{لا})^{\text{ن}} \text{ فرلا}$ .... (۱۴)

میں رکھو $\text{لا} = \text{جب}^{2}\text{ طہ}$ تو اس کی یہ صورت ہو جاتی ہے

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{2\text{م}+1}\text{ طہ جم}^{2\text{ن}+1}\text{ طہ فرطہ} \quad \cdots\cdots (15)$$

اسکی قیمت اوپر کے ضابطوں سے لکھی جا سکتی ہے جب کبھی ۲م + ۱ اور ۲ن + ۱ مثبت صحیح عدد ہوں یا صفر ہوں -

اسی طرح تکملہ $\int_{۰}^{۱} \text{لا}^{م} (۱ - \text{لا}^{۲})^{ن} \text{فرلا}$ ....(۱۶)

میں رکھو لا = جب طہ تو تکملہ یہ شکل اختیار کرتا ہے

$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{م}\,\text{طہ}\ \text{جم}^{۲ن+۱}\,\text{طہ}\ \text{فرطہ}$ ....(۱۷)

مثال ۳ - $\int_{۰}^{۱} \text{لا}^{۴} (۱ - \text{لا}^{۲})^{\frac{۳}{۲}} \text{فرلا} = ۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{۵}\,\text{طہ}\ \text{جم}^{۴}\,\text{طہ}\ \text{فرطہ}$

$= ۲ \times \frac{۴}{۹} \times \frac{۲}{۷} \times \frac{۳}{۵} \times \frac{۱}{۳} \times ۱ = \frac{۱۶}{۳۱۵}$

مثال ۴ - $\int_{۰}^{۱} \text{لا}^{۲} (۱ - \text{لا}^{۲})^{\frac{۳}{۲}} \text{فرلا} = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{۲}\,\text{طہ}\ \text{جم}^{۴}\,\text{طہ}\ \text{فرطہ} = \frac{۱}{۶} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{\pi}{۲}$

$= \frac{\pi}{۳۲}$

۹۸ - مربوط تکملے - محدود تکملوں کے متعلق کئی مسئلے ہیں جو دفعہ ۸۹ ۲۲۱
کی تعریف سے محض وجدانی طور پر حاصل ہوتے ہیں مثلاً

$\int_{۰}^{۱} \text{فہ}(\text{لا})\, \text{فرلا} = \int_{۰}^{۱} \text{فہ}(۱ - \text{لا})\, \text{فرلا}$ ......(۱)

اس کے ثبوت کے لئے لکھو لا = ۱ - لاَ ، فرلا = - فرلاَ تکمل کے حدود ہیں لا = ۰ ، لا = ۱ کے جواب میں لاَ = ۱ ، لاَ = ۰ بالترتیب - پس

$\int_{۰}^{۱} \text{فہ}(\text{لا})\, \text{فرلا} = -\int_{۱}^{۰} \text{فہ}(۱ - \text{لاَ})\, \text{فرلاَ} = \int_{۰}^{۱} \text{فہ}(۱ - \text{لا})\, \text{فرلا}$

آخیر میں زیر نکال دیا گیا کہ اس کی ضرورت نہیں -

اوپر کا عمل بعد اکو نقطہ لا = $\frac{۱}{۲}$ پر لیجا کر محور لا کی سمت کو بدل دینے کے مرادف ہے ، اس طور پر معلوم ہو گا کہ (۱) سے جو رقبے تعبیر ہوتے ہیں وہ متماثل ہیں -

(۱) کی ضروری شکل یہ ہے

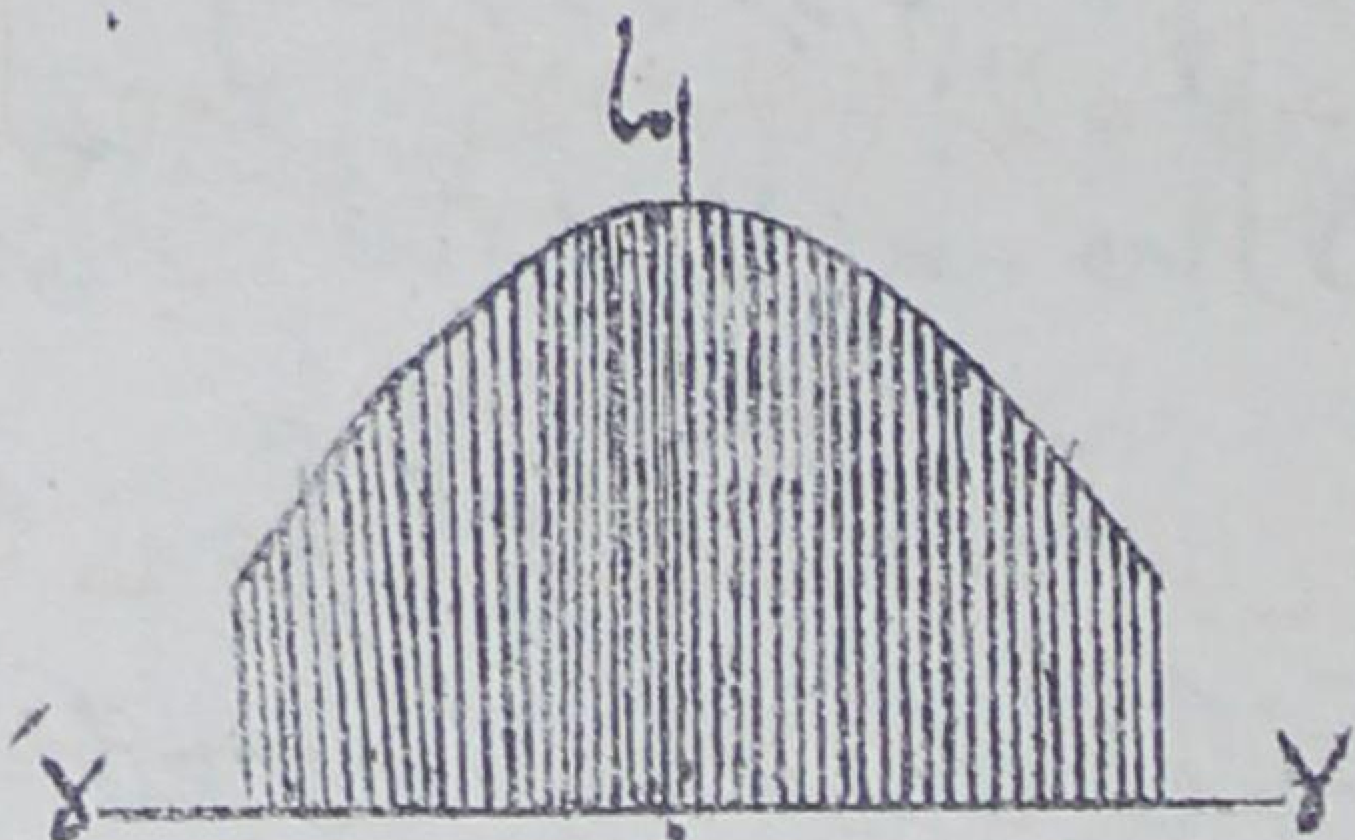
$$\int_{ب}^{\frac{\pi}{۲}} ف(\text{جب طہ})\, \text{فرطہ} = \int_{ب}^{\frac{\pi}{۲}} ف(\text{جم طہ})\, \text{فرطہ} \quad \ldots\ldots (۲)$$

مثال ۱۔ مثلاً $\int_{ب}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{۲}\,\text{طہ فرطہ} = \int_{ب}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{۲}\,\text{طہ فرطہ}$

پس ہر ایک تکملہ $= \frac{۱}{۲}\int_{ب}^{\frac{\pi}{۲}} (\text{جب}^{۲}\text{طہ} + \text{جم}^{۲}\text{طہ})\, \text{فرطہ} = \frac{۱}{۲}\int_{ب}^{\frac{\pi}{۲}} \text{فرطہ} = \frac{\pi}{۴}$

اگر فہ(لا)، لا کا جفت تفاعل ہو یعنی فہ(-لا) = فہ(لا) ......(۳)

تو $\int_{-ا}^{ا} \text{فہ}(لا)\, \text{فرلا} = ۲\int_{ب}^{ا} \text{فہ}(لا)\, \text{فرلا} \quad \ldots\ldots (۴)$ ۲۲۲



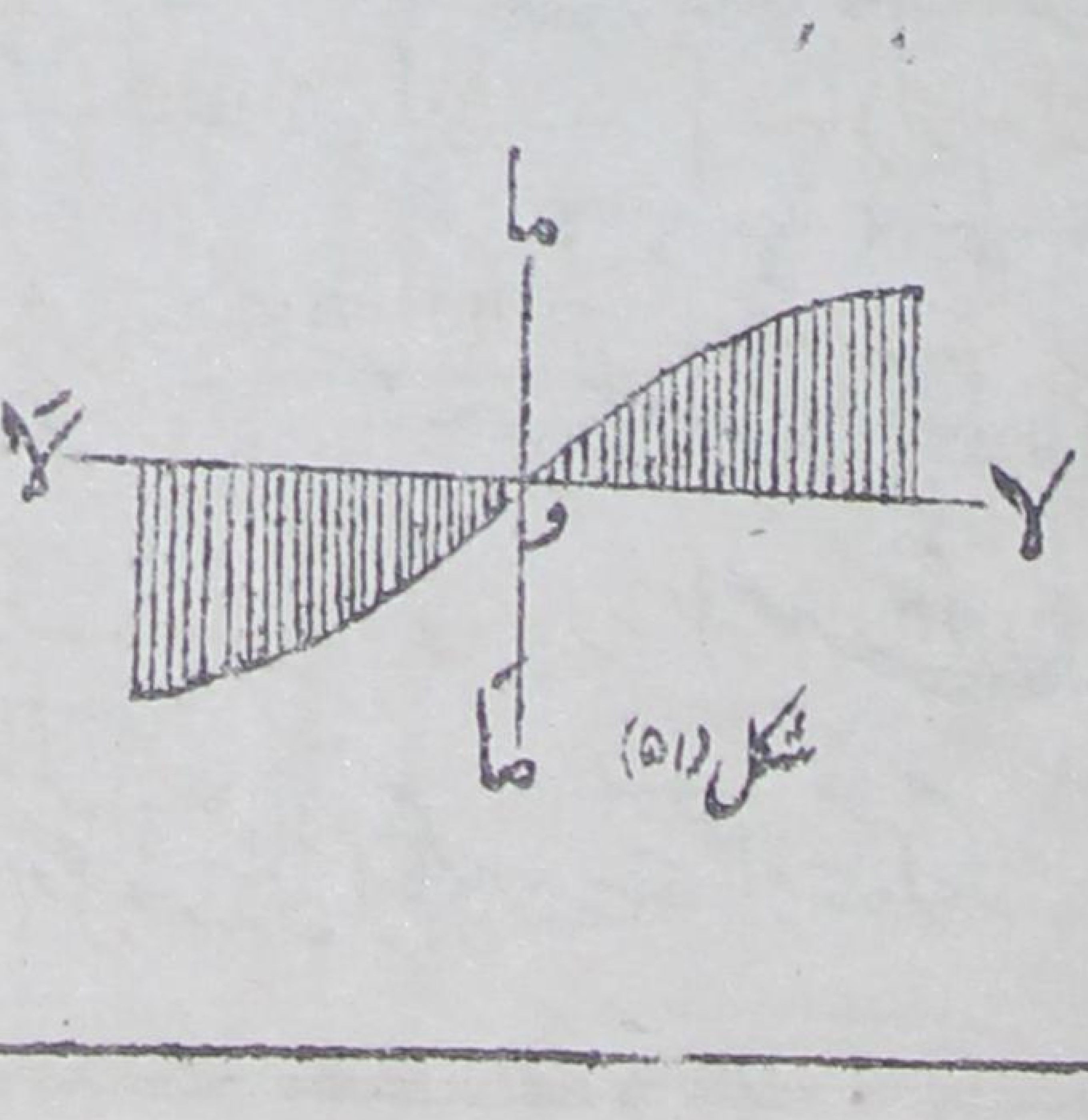
شکل (۵۰)

پہلے تکملہ سے جو رقبہ تعبیر ہوتا ہے صریحاً اس کی تنصیف محور ما سے ہوتی ہے۔ برعکس اس کے اگر فہ(لا)، لا کا طاق تفاعل ہو یعنے

فہ(-لا) = -فہ(لا) ...(۵)

تو $\int_{-ا}^{ا} \text{فہ}(لا)\, \text{فرلا} = ۰ \quad \ldots\ldots (۶)$

کیونکہ اس مجموعہ میں جس کی انتہا یہ محدود تکملہ ہے (دفعہ ۸۹) جزو فہ(لا) مف لا اور متقابل کی علامت والا جزو فہ(-لا) مف لا دونوں ملکر ایک دوسرے کو ساقط کرتے ہیں۔



شکل (۵۱)

مثال ۲۔ $\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}$ جب^{۲} طہ جم^{۳} طہ فر طہ = ۲ $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$ جب^{۲} طہ جم^{۳} طہ فر طہ

$= ۲ \times \frac{۱}{۵} \times \frac{۲}{۳} \times ۱ = \frac{۴}{۱۵}$

اور $\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}$ جب^{۳} طہ جم^{۲} طہ فر طہ = ۰ ۔ کیونکہ جب^{۳} طہ، طہ کے ساتھ علامت بدلتا ہے۔

ایسی ہی وجوہات کی بنا پر اگر فہ (ا - لا) = فہ (لا) ....(۷)

تو $\int_{۰}^{ا}$ فہ (لا) فر لا = ۲ × $\int_{۰}^{\frac{ا}{۲}}$ فہ (لا) فر لا ....(۸)

لیکن اگر فہ (ا - لا) = - فہ (لا) ....(۹)

تو $\int_{۰}^{ا}$ فہ (لا) فر لا = ۰ ....(۱۰)

(۸) کی خاص صورت کے طور پر ہم حاصل کرتے ہیں

$\int_{۰}^{\pi}$ ف (جب طہ) فر طہ = ۲ × $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$ ف (جب طہ) فر طہ ...(۱۱)

کیونکہ جب (π - طہ) = جب طہ

مثال ۳۔ $\int_{۰}^{\pi}$ جب^{۳} طہ جم^{۲} طہ فر طہ = ۲ $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$ جب^{۳} طہ جم^{۲} طہ فر طہ ۲۲۳

$= ۲ \times \frac{۲}{۵} \times \frac{۱}{۳} \times ۱ = \frac{۴}{۱۵}$

اور $\int_{۰}^{\pi}$ جب^{۲} طہ جم^{۳} طہ فر طہ = ۰

مسئلہ ۳۱

۱۔ دفعہ ۲۸ مثال ا کے طریقہ سے ثابت کرو کہ $\int_{ا}^{ب}$ لا^{۳} فر لا = $\frac{۱}{۴}$ (ب^{۴} - ا^{۴})

۲۔ ابتدائی اصولوں کی بناء پر ثابت کرو کہ $\int_{\text{ھا}}^{\text{بہ}} \text{جم لا فرلا} = \text{جب بہ} - \text{جب ھا}$

۳۔ نیز ثابت کرو کہ $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{قو}^{\text{ک لا}}\, \text{فرلا} = \frac{\text{قو}^{\text{ک ب}} - \text{قو}^{\text{ک ا}}}{\text{ک}}$

۴۔ ترسیمی تخیلات کی بناء پر دکھاؤ کہ

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{ک فہ(لا) فرلا} = \text{ک} \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ(لا) فرلا}$$

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ(لا) فرلا} = \int_{۰}^{\text{ب}-\text{ا}} \text{فہ(لا + ا) فرلا}،\quad \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ(ک لا) فرلا} = \frac{۱}{\text{ک}} \int_{\text{ک ا}}^{\text{ک ب}} \text{فہ(لا) فرلا}$$

۵۔ ثابت کرو کہ $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ(لا) فرلا} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ(ا + ب - لا) فرلا}$

۶۔ اگر ن اور پ مثبت صحیح عدد ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{نہا}_{\text{ن} \to \infty} \left(\frac{۱}{\text{ن}} + \frac{۱}{\text{ن}+۱} + \frac{۱}{\text{ن}+۲} + \dots + \frac{۱}{\text{پ ن}} \right) = \text{لوگ پ}$$

امثلہ ۳۲

۱۔ $\int_{۰}^{۱} \sqrt{\text{لا}}\, \text{فرلا} = \frac{۲}{۳}$، $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}}} = ۲$، $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۳ - ۲\text{لا}}} = \sqrt{۳} - ۱$

۲۔ $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۱ - \text{لا}^۲}} = \frac{\pi}{۲}$، $\int_{۰}^{\frac{۱}{\sqrt{۳}}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۲ - ۳\text{لا}^۲}} = \frac{\pi}{۴\sqrt{۳}}$

۳۔ $\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲\text{لا}^۲} = \frac{\pi}{۲\text{ا ب}}$

۴۔ $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{لا فرلا}}{\sqrt{۱ - \text{لا}^۲}} = ۱$، $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{لا فرلا}}{\sqrt{۱ + \text{لا}^۲}} = \sqrt{۲} - ۱$ ۲۲۴

۵- $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^{۲}+۱}} = \text{لوک}\,(۱+\sqrt{۲})\text{،} \quad \int_{۱}^{۲} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^{۲}-۱}} = \text{لوک}\,(۲+\sqrt{۳})$

۶- $\int_{۱}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\,(۱+\text{لا})} = \text{لوک}\ ۲\text{،} \quad \int_{۱}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\,(۱+\text{لا}^{۲})} = \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\ ۲$

۷- $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{۲}-\text{لا}+۱} = \frac{۲\pi}{۳\sqrt{۳}}$

۸- $\int_{۰}^{۱} \frac{۱-\text{لا}^{۲}}{۱+\text{لا}^{۲}}\,\text{فرلا} = \frac{\pi}{۲} - ۱$

۹- $\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^{۲}+\text{ا}^{۲})(\text{لا}^{۲}+\text{ب}^{۲})} = \frac{\pi}{۲\,\text{اب}\,(\text{ا}+\text{ب})}$

۱۰- $\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{لا}^{۲}\,\text{فرلا}}{(\text{لا}^{۲}+\text{ا}^{۲})(\text{لا}^{۲}+\text{ب}^{۲})} = \frac{\pi}{۲\,(\text{ا}+\text{ب})}$

۱۱- $\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{لا}\,\text{فرلا}}{(\text{لا}^{۲}+\text{ا}^{۲})(\text{لا}^{۲}+\text{ب}^{۲})} = \frac{۱}{\text{ا}^{۲}-\text{ب}^{۲}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$

۱۲- $\int_{۱}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{۲}\,(۱+\text{لا})} = ۱-\text{لوک}\ ۲\text{،} \quad \int_{۱}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\,(۱+\text{لا})^{۲}} = \text{لوک}\ ۲ - \frac{۱}{۲}$

۱۳- $\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{(۱+\text{لا}^{۲})^{۲}} = \frac{\pi}{۴}\text{،}$

۱۴- $\int_{۱}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{۲}-۱}} = \frac{\pi}{۲}\text{،} \quad \int_{۱}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{۲}+۱}} = \text{لوک}\,(۱+\sqrt{۲})$

۱۵- $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}\,(۱-\text{لا})}} = \pi\text{،} \quad \int_{۰}^{۱} \sqrt{\left(\frac{\text{لا}}{۱-\text{لا}}\right)}\,\text{فرلا} = \frac{\pi}{۲}$

۱۶- $\int_{-۱}^{۱} \sqrt{\frac{۱-\text{لا}}{۱+\text{لا}}}\,\text{فرلا} = \pi\text{،} \quad \int_{\text{عہ}}^{\text{بہ}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{(\text{لا}-\text{عہ})(\text{بہ}-\text{لا})}} = \pi$

۱۸- $\int_{ا}^{ب}\sqrt{\left(\frac{ب-لا}{لا-ا}\right)}\,\text{فرلا} = \int_{ا}^{ب}\sqrt{\left(\frac{لا-ا}{ب-لا}\right)}\,\text{فرلا} = \frac{۱}{۲}\pi(ب-ا)$

۱۹- $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \text{قط}^{۲}\,\text{طھ فرطھ} = ۱\text{،}\quad \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \text{مس}^{۲}\,\text{طھ فرطھ} = ۱-\frac{\pi}{۴}$

۲۰- $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب ۲طھ فرطھ} = ۱\text{،}\quad \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم ۲طھ فرطھ} = ۰$

۲۱- $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{جم طھ فرطھ}}{۱+\text{جب}^{۲}\text{طھ}} = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{جب طھ فرطھ}}{۱+\text{جم}^{۲}\text{طھ}} = \frac{\pi}{۴}$

۲۲- $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \text{قط}^{۴}\,\text{طھ فرطھ} = \frac{۳}{۴}\text{،}\quad \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \text{مس}^{۴}\,\text{طھ فرطھ} = \frac{\pi}{۴}-\frac{۲}{۳}$

۲۳- $\int_{۰}^{\pi} \frac{\text{فرطھ}}{۱+\text{ز جم طھ}} = \frac{\pi}{\sqrt{۱-ز^{۲}}}\text{،}\quad [ز<۱]$ ۲۲۵

۲۴- $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{فرطھ}}{۱+\text{جم طھ}} = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{فرطھ}}{۱+\text{جب طھ}} = ۱$

۲۵- $\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}} \text{مس طھ فرطھ} = ۰\text{،}\quad \int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}} \text{قط طھ فرطھ} = \text{لوک}(۳+۲\sqrt{۲})$

۲۶- $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} (\text{قط طھ} - \text{مس طھ})\,\text{فرطھ} = \text{لوک ۲}$

۲۷- $\int_{۰}^{\pi} \frac{\text{فرطھ}}{ا^{۲}-۲\text{اب جم طھ}+ب^{۲}} = \frac{\pi}{|ا^{۲}-ب^{۲}|}$

۲۸- $\int_{۰}^{۱} \text{لا}^{ن}\,\text{لوک لا فرلا} = -\frac{۱}{(ن+۱)^{۲}}$

۲۹- $\int_{۰}^{۱} \text{جب}^{-۱}\text{لا فرلا} = \frac{\pi}{۲}-۱\text{،}\quad \int_{۰}^{۱} \text{مس}^{-۱}\text{لا فرلا} = \frac{\pi}{۴}-\frac{۱}{۲}\text{لوک ۲}$

۳۰۔ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{ط جب ط فرط} = 1$ ، $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{ط جم ط فرط} = \frac{\pi}{2} - 1$

۳۱۔ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{ط}^{2}\,\text{جب ط فرط} = \pi - 2$ ، $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{ط}^{2}\,\text{جم ط فرط} = \frac{\pi^{2}}{4} - 2$

۳۲۔ $\int_{0}^{\pi} \text{ط}\,(\pi - \text{ط})\,\text{جب ط فرط} = 4$ ، $\int_{0}^{\pi} \text{ط}\,(\pi - \text{ط})\,\text{جم ط فرط} = 0$

۳۳۔ $\int_{-1}^{1} (1 - \text{لا}^{2})\,\text{جم بہ لا فرلا} = \frac{4}{\text{بہ}^{3}}\,(\text{جب بہ} - \text{بہ جم بہ})$

۳۴۔ $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{لا سس}^{-1}\,\text{لا}}{(1 + \text{لا}^{2})^{2}}\,\text{فرلا} = \frac{\pi}{8}$

۳۵۔ $\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1 - \text{لا}^{2}}}{\text{ا} - \text{لا}}\,\text{فرلا} = \pi\left\{\text{ا} - \sqrt{\text{ا}^{2} - 1}\right\}$ بشرطیکہ $\text{ا} > 1$

۳۶۔ $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{ط قط}^{2}\,\text{ط فرط} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\,\text{لوک}\,2$

۳۷۔ $\int_{0}^{\infty} \text{قو}^{-\text{لا}}\,\text{جم}\left(\text{لا} + \frac{\pi}{4}\right)\text{فرلا} = 0$

۳۸۔ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{فرع}}{\text{جمز ع}} = \pi$

۳۹۔ $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{ا}^{2}\,\text{قو}^{\text{لا}} + \text{ب}^{2}\,\text{قو}^{-\text{لا}}} = \frac{1}{\text{اب}}\,\text{سس}^{-1}\,\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$

۴۰۔ $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{ا}^{2}\,\text{جمز}^{2}\,\text{لا} + \text{ب}^{2}\,\text{جبز}^{2}\,\text{لا}} = \frac{1}{\text{اب}}\,\text{سس}^{-1}\,\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$

۴۱۔ $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{عہ فرلا}}{\text{عہ}^{2} + \text{جبز}^{2}\,\text{لا}} = \frac{\text{جم}^{-1}\,\text{عہ}}{\sqrt{1 - \text{عہ}^{2}}}$ یا $\frac{\text{جمز}^{-1}\,\text{عہ}}{\sqrt{\text{عہ}^{2} - 1}}$ بموجب اسکے کہ $\text{عہ}^{2} \lessgtr 1$ ۲۲۶

۴۲- $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{فرطہ}}{\text{جمز}^۲\text{عہ} - \text{جم}^۲\text{طہ}} = \frac{\pi}{\text{جمز عہ}}$ ، $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{جم}^۲\text{طہ فرطہ}}{\text{جمز}^۲\text{عہ} - \text{جم}^۲\text{طہ}}$

$= \frac{\pi \ \text{فو}^{-\text{عہ}}}{۲\ \text{جمز عہ}}$

امثلہ ۳۳

(تحویلی ضابطے وغیرہ)

۱- ذیل کے تکملوں کی قیمتیں لکھو

(۱) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^۷\text{طہ فرطہ}$ ، $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^۴\text{طہ فرطہ}$ ، $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^۳\text{طہ فرطہ}$

(۲) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^۲\text{طہ فرطہ}$ ، $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^۳\text{طہ جم}^۳\text{طہ فرطہ}$ ،

$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^۵\text{طہ جم}^۶\text{طہ فرطہ}$

(۳) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^۵\text{طہ فرطہ}$ ، $\int_{۰}^{\pi} \text{جم}^۵\text{طہ فرطہ}$ ، $\int_{۰}^{\pi} \text{جب}^۳\text{طہ جم}^۴\text{طہ فرطہ}$

(۴) $\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^۴\text{طہ فرطہ}$ ، $\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^۵\text{طہ فرطہ}$ ،

$\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^۵\text{طہ فرطہ}$ ، $\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^۳\text{طہ جم}^۳\text{طہ فرطہ}$

۲- ابتدائی اصولوں سے ثابت کرو کہ

$\int_{۰}^{۱} \text{لا}^{م} (۱-\text{لا})^{ن}\ \text{فرلا} = \int_{۰}^{۱} \text{لا}^{ن} (۱-\text{لا})^{م}\ \text{فرلا}$ ،

ثابت کرو کہ انکی مشترک قیمت ہے $\frac{\lfloor م \ \lfloor ن}{\lfloor م+ن+۱}$

۳۔ ثابت کرو کہ $\int_{-\text{۱}}^{\text{۱}} \text{فہ}(\text{لا}^{\text{۲}})\,\text{فرلا} = \text{۲}\int_{\text{۰}}^{\text{۱}} \text{فہ}(\text{لا}^{\text{۲}})\,\text{فرلا}$ ،

$$\int_{-\text{۱}}^{\text{۱}} \text{فہ}(\text{لا}^{\text{۲}})\,\text{لا}\,\text{فرلا} = \text{۰}$$

۴۔ ثابت کرو کہ $\int_{-\text{۱}}^{\text{۱}} \text{فہ}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \int_{\text{۰}}^{\text{۱}} \left[\text{فہ}(\text{لا}) + \text{فہ}(-\text{لا})\right]\text{فرلا}$

اور $\int_{-\text{۱}}^{\text{۱}} \left[\text{فہ}(\text{لا}) - \text{فہ}(-\text{لا})\right]\text{فرلا} = \text{۰}$

۵۔ اگر $\text{ع}_{\text{ن}} = \int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{\text{۴}}} \text{مس}^{\text{ن}}\,\text{طہ}\,\text{فرطہ}$ تو ثابت کرو کہ $\text{ع}_{\text{ن}} = \frac{\text{۱}}{\text{ن}-\text{۱}} - \text{ع}_{\text{ن}-\text{۲}}$ ۲۴۷

۶۔ $\int_{\text{۰}}^{\text{۱}} \text{لا}^{\text{۳}}(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۵}}{\text{۲}}}\,\text{فرلا} = \frac{\text{۲}}{\text{۶۳}}$

۷۔ $\int_{\text{۰}}^{\text{۱}} \text{لا}^{\text{۳}}(\text{۱}-\text{لا})^{\text{۳}}\,\text{فرلا} = \frac{\text{۱}}{\text{۱۴۰}}$

۸۔ $\int_{\text{۰}}^{\text{۱}} \text{لا}^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}(\text{۱}-\text{لا})^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}\,\text{فرلا} = \frac{\text{۳}\pi}{\text{۱۲۸}}$

۹۔ $\int_{\text{۰}}^{\text{۱}} \frac{\text{لا}^{\text{۵}}\,\text{فرلا}}{\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}}}} = \frac{\text{۸}}{\text{۱۵}}$ ، $\int_{\text{۰}}^{\text{۱}} \frac{\text{لا}^{\text{۶}}\,\text{فرلا}}{\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}}}} = \frac{\text{۵}}{\text{۳۲}}\pi$

۱۰۔ $\int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{\text{۲}}} \text{طہ}\,\text{جب}\,\text{طہ}\,\text{جم}\,\text{طہ}\,\text{فرطہ} = \frac{\pi}{\text{۸}}$ ، $\int_{-\frac{\pi}{\text{۲}}}^{\frac{\pi}{\text{۲}}} \text{طہ}\,\text{جب}^{\text{۲}}\,\text{طہ}\,\text{فرطہ} = \text{۰}$

۱۱۔ $\int_{\text{۰}}^{\pi} \text{طہ}\,\text{جب}\,\text{طہ}\,\text{جم}^{\text{۲}}\,\text{طہ}\,\text{فرطہ} = \frac{\pi}{\text{۳}}$ ، $\int_{\text{۰}}^{\pi} \text{طہ}\,\text{جب}^{\text{۲}}\,\text{طہ}\,\text{جم}\,\text{طہ}\,\text{فرطہ} = -\frac{\text{۴}}{\text{۹}}$

۱۲۔ $\int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{\text{۲}}} \frac{\text{جب}\,\text{۳}\,\text{طہ}}{\text{جب}\,\text{طہ}}\,\text{فرطہ} = \frac{\pi}{\text{۲}}$ ، $\int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{\text{۲}}} \frac{\text{جب}\,\text{۴}\,\text{طہ}}{\text{جب}\,\text{طہ}}\,\text{فرطہ} = \frac{\text{۳}}{\text{۴}}$ ،

$$\int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{\text{۲}}} \frac{\text{جب}\,\text{۵}\,\text{طہ}}{\text{جب}\,\text{طہ}}\,\text{فرطہ} = \frac{\pi}{\text{۲}}$$

۱۳- $\int_{0}^{\pi} (\text{ا جب طہ} + \text{ب جم طہ})^{5}\ \text{فرطہ} = \frac{16}{15}\ \text{ا}^{5} + \frac{8}{3}\ \text{ا}^{3}\text{ب}^{2} + 2\ \text{ا ب}^{4}$

۱۴- $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جم لا} - \text{جب لا}}{1 + \text{جب لا جم لا}}\ \text{فرلا} = 0$

۱۵- ثابت کرو کہ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جم}^{2}\text{طہ فرطہ}}{\text{ا}^{2}\text{جم}^{2}\text{طہ} + \text{ب}^{2}\text{جب}^{2}\text{طہ}} = \frac{\pi}{2\ \text{ا}\ (\text{ا} + \text{ب})}$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جب}^{2}\text{طہ فرطہ}}{\text{ا}^{2}\text{جم}^{2}\text{طہ} + \text{ب}^{2}\text{جب}^{2}\text{طہ}} = \frac{\pi}{2\ \text{ب}\ (\text{ا} + \text{ب})}$

۱۶- ثابت کرو کہ $\int_{-1}^{1} (1 + \text{لا})^{\text{م}} (1 - \text{لا})^{\text{ن}}\ \text{فرلا}$

$= 2^{\text{م}+\text{ن}+1} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{2\text{ن}+1}\text{طہ}\ \text{جم}^{2\text{م}+1}\text{طہ فرطہ}$

۱۷- ثابت کرو کہ $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{(1 + \text{لا}^{2})^{\text{ن}}}$

$= \frac{2\text{ن} - 3}{2\text{ن} - 2} \int_{0}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{(1 + \text{لا}^{2})^{\text{ن}-1}}$ [رکھو لا = مس ہ]

۱۸- اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ

$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{(1 + \text{لا}^{2})^{\text{ن}+\frac{1}{2}}} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2\text{ن} - 2)}{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2\text{ن} - 1)}$

۱۹- اگر ن > ۱ تو ثابت کرو کہ

$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\{\text{لا} + \sqrt{1 + \text{لا}^{2}}\}^{\text{ن}}} = \frac{\text{ن}}{\text{ن}^{2} - 1}$ رکھو لا = جمز ع

۲۰- ثابت کرو کہ $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{فرع}}{\text{جمز}^{\text{ن}}\text{ع}} = \frac{\text{ن} - 2}{\text{ن} - 1} \int_{0}^{\infty} \frac{\text{فرع}}{\text{جمز}^{\text{ن}-2}\text{ع}}$

[رکھو جمز ع = قط طہ]

۲۲۸

۲۱۔ اگر ع‌ن = ∫ (۰ سے ط/۲) طہ جم^ن طہ فر طہ تو ثابت کرو کہ ع‌ن = − ۱/ن^۲ + (ن−۱)/ن ع‌ن−۲

ثابت کرو کہ ع‌۳ = ۲۶۹۴.....،

۲۲۔ اگر ع‌ن = ∫ (۰ سے ۲ا) لا^ن √(۲ ا لا − لا^۲) فرلا تو ثابت کرو کہ

ع‌ن = (۲ن + ۱)/(ن + ۲) ا ع‌ن−۱

ہندسی طریق پر یا کسی اور طرح سے ع‌۰ کی قیمت دریافت کرو اور ع‌۱، ع‌۲ کی قیمتیں مستنبط کرو۔

امثلہ ۳۴

۱۔ ∫ (۰ سے ۱) (۱ − لا^۲)^ن فرلا کی قیمت پر غور کر کے ثابت کرو کہ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو

۱ − ن/(۱×۳) + ن(ن−۱)/(۱×۲×۵) − ن(ن−۱)(ن−۲)/(۱×۲×۳×۷)

+ ..... = (۲×۴×۶× ..... ۲ن)/(۳×۵×۷× ..... (۲ن+۱))

۲۔ اگر (۱ + لا)^ن = ا + پ‌۱ لا + پ‌۲ لا^۲ + ... + پ‌ن لا^ن تو ثابت کرو کہ

پ‌۱ − ۱/۲ پ‌۲ + ۱/۳ پ‌۳ − ..... + (−۱)^(ن−۱) پ‌ن/ن = ۱ + ۱/۲ + ۱/۳ + ... + ۱/ن

۳۔ اگر ا بڑا ہو تو ثابت کرو کہ ذیل کے سلسلہ کا مجموعہ لاتناہی تک تقریباً ط/۲ا ہے

۱/ا^۲ + ۱/(ا^۲ + ۱^۲) + ۱/(ا^۲ + ۲^۲) + ...

۴۔ ثابت کرو کہ ∫ (۰ سے ط) (لا جب لا)/(۱ + جم^۲ لا) فرلا = ط^۲/۴

۲۲۹ ۵۔ ابتدائی اصولوں سے ثابت کرو کہ

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{ن+1}\,\text{طہ فرطہ} < \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{ن}\,\text{طہ فرطہ}$$

اس طرح ثابت کرو کہ $\frac{\pi}{2}$ ، کسر

$$\frac{۲\times۲\times۴\times۴\times۶\times۶\times\ldots\ldots\times۲ن\times۲ن}{۱\times۳\times۳\times۵\times۵\times۷\times\ldots\ldots\times(۲ن-۱)(۲ن-۱)}$$

اور اس کسر کے درمیان میں واقع ہوتا ہے جو اوپر کی کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں سے آخری جزو ضربی حذف کرنے سے حاصل ہو۔ (والس)۔

۶۔ ابتدائی اصولوں سے ثابت کرو کہ

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{مس}^{ن+1}\,\text{طہ فرطہ} < \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{مس}^{ن}\,\text{طہ فرطہ}$$

اس لئے امثلہ ۳۳ (۵) کا نتیجہ استعمال کرنے سے ثابت کرو کہ $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{مس}^{ن}\,\text{طہ فرطہ}$

$$\frac{1}{۲(ن-۱)} \quad \text{اور} \quad \frac{1}{۲(ن+۱)}$$

کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۷۔ ثابت کرو کہ

$$\int_{0}^{\infty} \text{جب طہ فرطہ} \quad \text{اور} \quad \int_{0}^{\infty} \text{جم طہ فرطہ}$$

ناقابل تعین ہیں۔

۸۔ ترسیمی تخیلات کی بناء پر ثابت کرو کہ

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}\,\text{فرطہ} \quad \text{محدود اور قابل تعین ہے۔}$$

۹۔ اگر فا (لا) محدود اور مسلسل ہو لا کی اُن قیمتوں کے لئے جو ٠ اور ۱ کے درمیان ہیں سوائے لا = ٠ کے جس کے لئے یہ لامتناہی ہوتا ہے تو تکملہ $\int_{0}^{1}$ فا (لا) فرلا محدود ہے بشرطیکہ ایک مثبت مقدار م ایسی معلوم ہو سکتی ہے

جو ایک سے کم ہے اور

$\lim_{لا \to ۰} لا^م فا(لا)$ محدود ہے۔ [رکھو $لا = ت^ن$]

۱۰۔ اگر $فا(لا)$ محدود اور مسلسل ہو لا کی تمام قیمتوں کے لئے تو تکملہ

$\int_۰^\infty فا(لا)\, فرلا$ محدود ہوگا بشرطیکہ ایک مقدار م ایسی مل سکتی ہو جو ایک سے بڑی ہے

اور $\lim_{لا \to \infty} لا^م فا(لا)$ محدود ہے۔ [رکھو $لا = ت^{-ن}$]

۱۱۔ ثابت کرو کہ ۲۲۰

$$\int_۰^\infty جم\, لا^۲\, فرلا \quad \text{اور} \quad \int_۰^\infty جب\, لا^۲\, فرلا$$

محدود اور قابل تعین ہیں۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ $\int_۰^\infty لا\, قو^{-لا^۲}\, فرلا = \frac{۱}{۲}$، $\int_{-\infty}^{\infty} لا\, قو^{-لا^۲}\, فرلا = ۰$

۱۳۔ ثابت کرو کہ تکملہ

$$\int_۰^\infty لا^ن\, قو^{-لا^۲}\, فرلا \quad (\text{جہاں } ن > -۱)$$

محدود اور قابل تعین ہے۔

۱۴۔ اگر ن > ۱ تو ثابت کرو کہ

$$\int_۰^\infty لا^ن\, قو^{-لا^۲}\, فرلا = \frac{۱}{۲}(ن-۱) \int_۰^\infty لا^{ن-۲}\, قو^{-لا^۲}\, فرلا$$

اگر ن مثبت صحیح عدد ہے تو

$$\int_۰^\infty لا^{۲ن+۱}\, قو^{-لا^۲}\, فرلا = \frac{۱}{۲} \underline{ن}$$

۱۵۔ اگر $ع_ن = \int_۰^\infty لا^ن\, قو^{-علا}\, فرلا$ تو ثابت کرو کہ $ع_ن = \frac{ن}{ع} ع_{ن-۱}$

جہاں ن مثبت ہے۔ اس لئے ثابت کرو کہ اگر ن صحیح عدد ہو تو

$$\int_{0}^{\infty} \text{لا}^{\text{ن}}\ \text{قو}^{-\text{علا}}\ \text{فرلا} = \frac{\lfloor \text{ن}}{\text{ع}^{\text{ن}+1}}$$

۱۶- ناقصی تکملہ $\int_{0}^{\text{فہ}} \frac{\text{فرطہ}}{\sqrt{1 - \text{ک}^2\ \text{جب}^2\ \text{طہ}}}$ کی جدولیں زاویہ کے منٹ کے فرق پر فہ کی قیمتوں کے لئے مرتب کی گئی ہیں۔ جدول کے کسی حصہ میں متواتر اندراجوں کے فرق کے لئے ضابطہ حاصل کرو۔

مثلاً اگر ک = $\frac{1}{2}$، فہ = ۶۰° تو ثابت کرو کہ فرق تقریباً ۰۰۰۳۲۳ء ہوگا۔

۱۷- اگر ف(لا) اور فہ(لا) محدود اور مسلسل ہوں اور فہ(لا) کی تمام وقفہ لا = ا سے لا = ب تک وہی علامت رہے تو

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{ف(لا)}\ \text{فہ(لا)}\ \text{فرلا} = \text{ف}\left[\text{ا} + \text{طہ}(\text{ب} - \text{ا})\right] \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ(لا)}\ \text{فرلا}$$

جہاں ۱ > طہ > ۰۔

۱۸- یہ بتاؤ کہ تساوی $\int_{1}^{\text{لا}} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \text{لوک لا}$ سے یہ کیونکر حاصل ہوتا ہے ۲۳۱

کہ موسیقی سلسلہ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots$ کی ن رقموں کا مجموعہ

لوک(۱ + ن) اور ۱ + لوک ن کے درمیان واقع ہے۔

ثابت کرو کہ اس سلسلہ کی دس لاکھ رقموں کا مجموعہ ۱۳ء۸ اور ۱۴ء۸ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۱۹- ترسیمی اصولوں کی بناء پر دکھاؤ کہ اگر ف(لا) استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے جیسے لا، ۰ سے ∞ تک بڑھتا ہے تو سلسلہ

ف(۱) + ف(۲) + ف(۳) + ...

مستدق ہے اور اس کا مجموعہ ت اور ت + ف (۱) کے درمیان واقع ہوتا ہے بشرطیکہ تکملہ ت = $\int_{1}^{\infty}$ ف (لا) فرلا محدود ہو۔ اس کو سلسلہ

$$\frac{1}{(ن+۱)^2} + \frac{1}{(ن+۲)^2} + \frac{1}{(ن+۳)^2} + \ldots\ldots$$ پر استعمال کرو۔

امثلہ ۳۵

۱۔ اگر ایک گیس کا دباؤ (د) ہو اور حجم (ح) اور ان میں تعلق ہو د ح = مستقل تو حجم ح سے ح، تک پھیلنے میں کام و ح لوک $\frac{ح_1}{ح}$ ہو گا۔

۲۔ اگر اسمیں رشتہ د ح^{جہ} = مستقل ہو تو کام ہو گا

$$\frac{1}{جہ-1}(د\ ح - د_1\ ح_1)$$

۳۔ ایک لچکدار رسی کا تناؤ ایسے بدلتا ہے جیسے طبعی طول پر اس کا اضافہ۔ ایک طول سے دوسرے طول تک رسی کو کھینچکر ناپنے میں جو کام کیا جاتا ہے وہ وہی ہے گویا تناؤ مستقل ہے اور اس کے ابتدائی اور آخری تناؤں کے نصف مجموعہ کے مساوی ہے۔

۴۔ ایک پونڈ کو لاتناہی فاصلہ سے سطح زمین تک لانے میں جاذبہ ارض جو کام کرتی ہے وہ ن فٹ، پونڈ کے مساوی ہے جہاں زمین کا نصف قطر ن فٹ ہے۔ (یہ مان لو کہ قوت جاذبہ زمین کے مرکز سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے)

۲۳۲

آٹھواں باب

ہندسی استعمال

۹۹- رقبہ کی تعریف- اصول اقلیدس میں ایسے مسائل ثابت کئے گئے ہیں جن سے اصطلاح "رقبہ" کا ٹھیک مفہوم متعین ہوتا ہے مگر صرف اس صورت میں جبکہ اشکال بالتمام خطوط مستقیم سے گھری ہوئی ہوں- بالخصوص یہ ثابت کیا گیا ہے کہ ایک مستطیل کسی دی ہوئی شکل کے مساوی ایک دئے ہوئے قاعدہ پر بنایا جاسکتا ہے، یہ قاعدہ کوئی اختیاری طول ہوسکتا ہے مثلاً طول کی اکائی- اس شکل کا رقبہ اس نسبت کے ناپ سے تعبیر ہوگا جو اس مستطیل کو اکائی طول والے ایک مربع کے ساتھ ہے-

اس عمل کا اطلاق ایسی شکل پر نہیں ہوسکتا جو پورے یا جزوی طور پر منحنی خطوط سے گھری ہوئی ہو- اس لئے ہمیں دیکھنا ہے کہ ایسی صورت میں "رقبہ" کے مفہوم کی تعریف کیا اختیار کیجائے- اسے حاصل کرنے کے لئے ہم فرض کرتے ہیں کہ دو مستقیم الاضلاع شکلیں بنائی گئی ہیں ایک منحنی شکل کے باہر اور دوسری اسکے اندر، پہلی شکل کے اندر یہ منحنی رقبہ شامل ہوتا ہے اور دوسری اس منحنی رقبہ کے اندر واقع ہوتی ہے- اندرونی شکل کے رقبہ کے لئے اوپری انتہا ہے اور بیرونی شکل کے لئے نچلی انتہا ہے- یہ ثابت ہوسکتا ہے کہ یہ دونوں انتہائیں منطابق ہیں- اس مشترک انتہائی قیمت کو از روئے تعریف دی ہوئی منحنی الاضلاع شکل کے "رقبہ" کا ناپ اختیار کیا جاتا ہے-

مثلاً دائرہ کی صورت میں (دیکھو شکل ۱۷، دفعہ ۱۷) اگر ن ق اندرونی کثیرالاضلاع کا ضلع ہو تو کثیرالاضلاع کا رقبہ ½ Σ و ل × ن ق ہوگا۔ اب و ل نصف قطر سے کم ہے اور Σ ن ق دائرہ کے محیط سے کم ہے۔ اس لئے اندر بنے ہوئے کثیرالاضلاع کے رقبہ کی اوپر کی انتہا ½ ا × ۲ π ا یا π ا² سے بڑھ نہیں سکتی جہاں دائرہ کا نیم قطر ا ہے۔ اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ بیرونی کثیرالاضلاع کے رقبہ کی نچلی انتہا π ا² سے کم نہیں ہو سکتی۔ علاوہ اس کے اندرونی اور متناظر بیرونی کثیرالاضلاعوں کے رقبوں کا فرق ہے Σ ن ل × ل ت اور یہ کم ہے Σ (ن ل) × صہ سے جہاں صہ، ل ت کی بڑی سے بڑی قیمت ہے۔ چونکہ یہ اسقدر چھوٹی بنائی جا سکتی ہے جسقدر ہم چاہیں اس لئے مذکورۂ بالا اوپر کی اور نچلی انتہائیں مساوی ہیں، اس لئے ہر ایک π ا² کے مساوی ہے۔

اسی طور پر ثابت ہو سکتا ہے کہ نیم قطر ا کے کسی دائرہ کے قطاع کا رقبہ ½ ا² طہ ہے جہاں طہ قطاع کا زاویہ ہے۔

۱۰۰۔ کارٹیزی محددوں میں رقبہ کے لئے ضابطہ۔ ۲۲۳

اگر کارٹیزی محددوں میں منحنی کی مساوات

ما = فہ (لا) ....(۱)

ہو تو منحنی، محور لا اور معینوں لا = ا، لا = ب کے درمیان گھرا ہوا رقبہ ہے

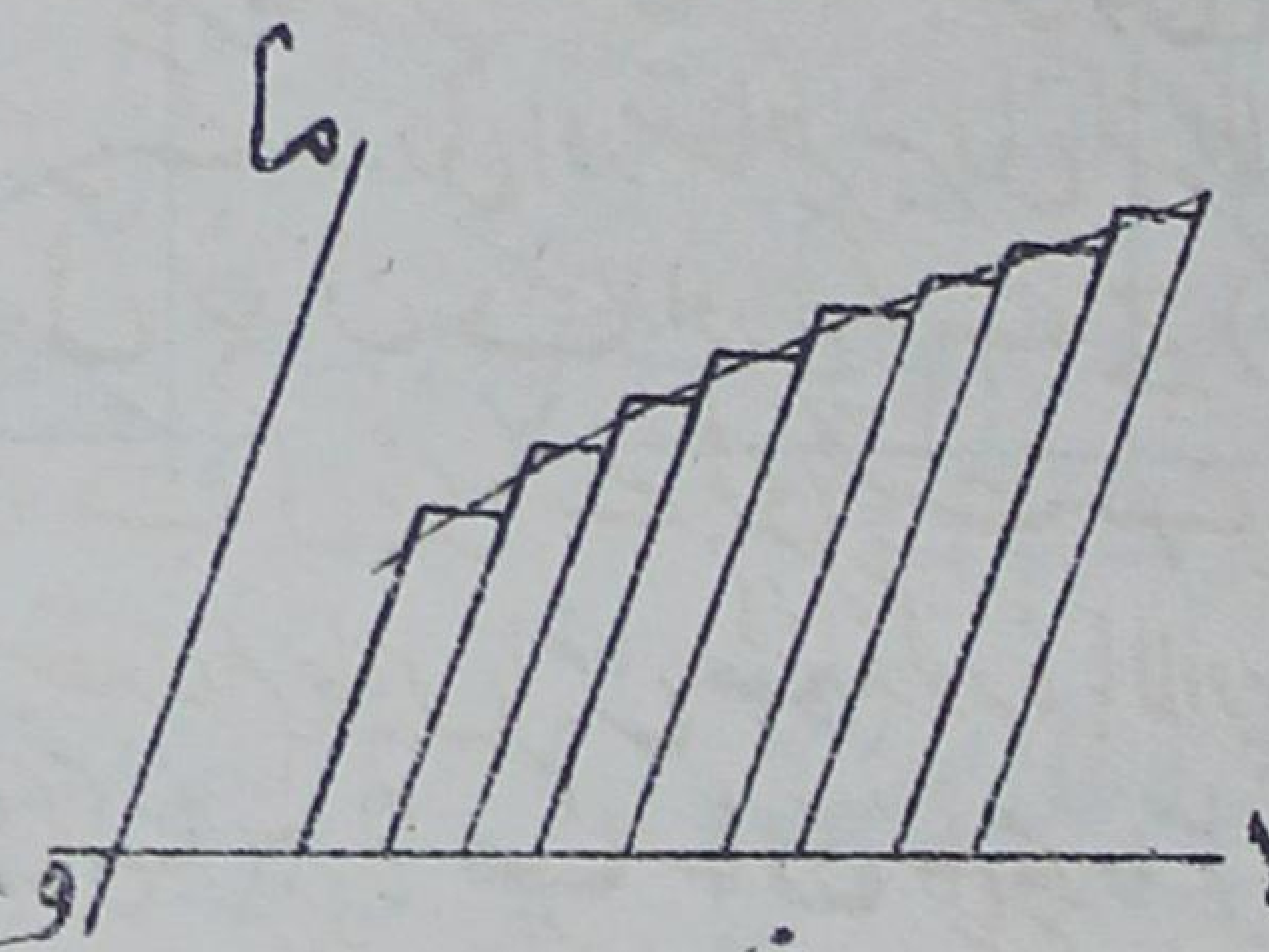
$\int_{ا}^{ب}$ فہ (لا) ذ لا یا $\int_{ا}^{ب}$ ما ذ لا ....(۲)

تسلیم کر لیا گیا ہے کہ فہ (لا) اُس نمونہ کا تفاعل ہے جسکا دفعہ ۹۰ میں ذکر کیا گیا۔ نتیجہ بالا پہلے دفعہ کی تعریف اور دفعہ ۹۰ کی تحقیق سے فوراً اخذ ہو جاتا ہے۔ اگر محور مائل ہوں اور ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ سہ بنائیں تو عنصری مستطیل ما مف لا کی بجائے جو مجموعہ میں واقع ہوتے ہیں اور جنکی انتہا رقبہ ہے عنصری متوازی الاضلاع ما مف لا جب سہ ہونگے۔ رقبہ جو منحنی، محور لا اور احاطہ کرنے والے دو معینوں کے درمیان

گھرا ہوا ہے اب ہوگا

$$\text{جب س} = \int \text{ما فرلا} \qquad \ldots\ldots\ldots (\text{۳})$$

جسے دئے ہوئے خاص حدود کے درمیان لینا چاہئے۔



شکل (۵۲)

مثال ۱ ۔ ناقص $\dfrac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} + \dfrac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} = \text{۱} \qquad \ldots\ldots\ldots (\text{۱})$

کے ربع کا رقبہ دریافت کرو۔

$$\text{رقبہ مطلوبہ} = \int_{\text{۰}}^{\text{ا}} \text{ما فرلا} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}} \int_{\text{۰}}^{\text{ا}} \sqrt{\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}}\ \text{فرلا} = \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\, \pi\, \text{ا ب}^{*} \ \text{اس}$$

محدود تکملہ کی قیمت دفعہ ۹۶ میں معلوم کی گئی تھی۔

اس لئے کل ناقص کا رقبہ $= \pi\ \text{ا ب}$

مثال ۲ ۔ قائم زائد $\text{لا}^{2} - \text{ما}^{2} = \text{۱} \qquad \ldots\ldots\ldots (\text{۵})$

کی مثبت شاخ کے لئے رکھو $\text{لا} = \text{جمز ع}$، $\text{ما} = \text{جنز ع} \qquad \ldots\ldots (\text{۶})$ ۲۳۴

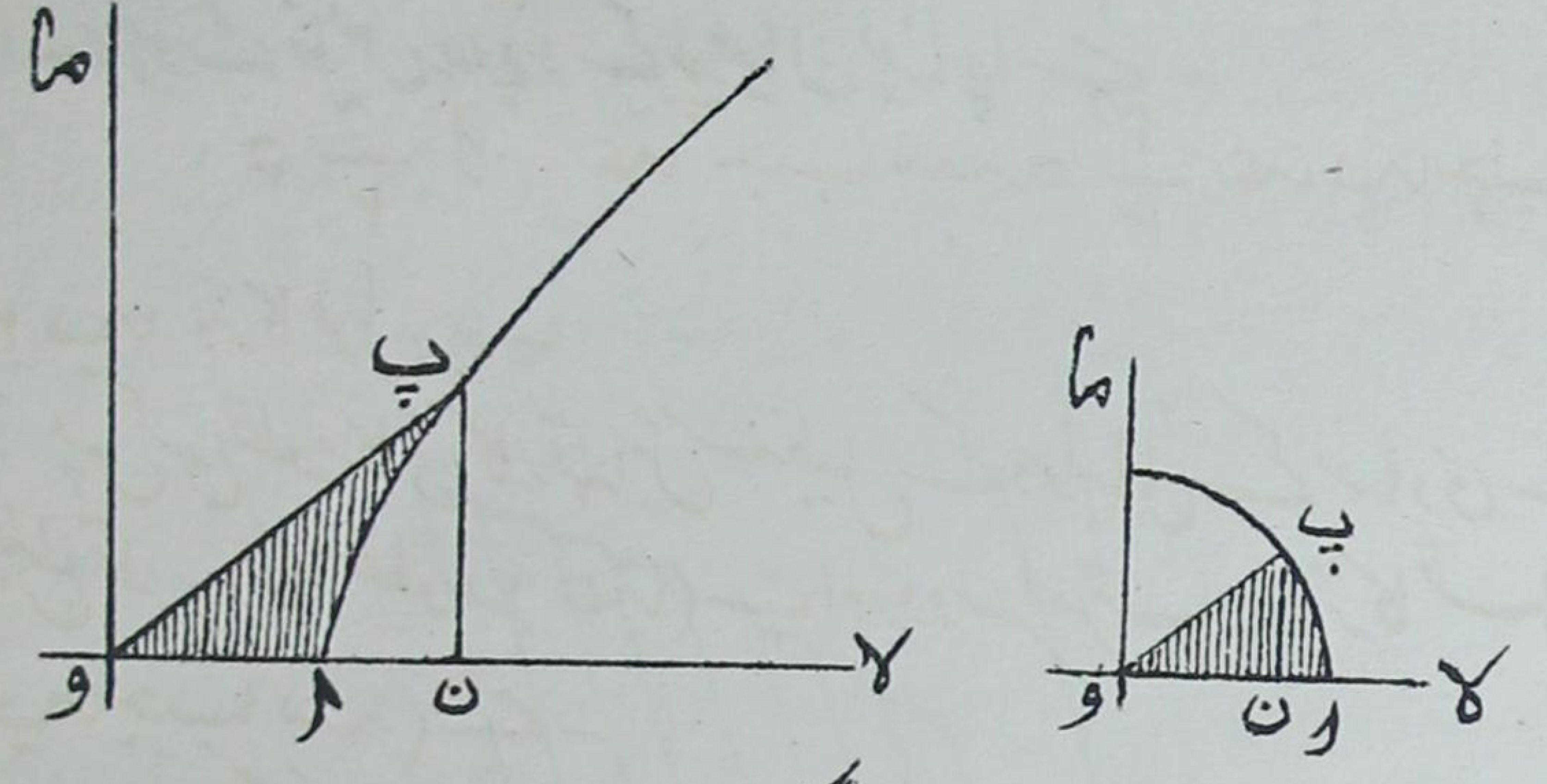
کیونکہ یہ (۵) کو پورا کرتی ہیں اور ایسے لا، ما کی قیمتوں کی مطلوبہ سمت پوری ہوتی ہے

منحنی محور لا اور اس معین کے درمیان کا رقبہ جس کا تعین متغیر ع سے ہوتا ہے

$$\int_{\text{۱}}^{\text{لا}} \text{ما فرلا} = \int_{\text{۰}}^{\text{ع}} \text{جنز}^{2}\text{ع فرع} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \int_{\text{۰}}^{\text{ع}} (\text{جمز ۲ ع} - \text{۱})\ \text{فرع}$$

$= \frac{1}{4}$ جبز ۲ع $- \frac{1}{2}$ ع ....(۷)

ہے۔



شکل ۵۳

(۷) سے بائیں جانب کی شکل میں پ ا ن کا رقبہ حاصل ہوتا ہے۔
اس لئے زائدی قطاع و ا پ کا رقبہ ہے

$\frac{1}{2}$ پ ن × و ن - رقبہ پ ا ن = $\frac{1}{2}$ ع ......(۸)

ہم دیکھتے ہیں کہ یہاں زائدی تفاعلوں جمز ع، جبز ع وغیرہ کے حیطہ ع اور دائری تفاعلوں جم طہ، جب طہ وغیرہ کے حیطہ طہ میں ایک مشابہت ہے۔ ہر صورت میں تغیر متبوع نقطہ پ کے جواب میں جس کے محدد (جمز ع، جبز ع) یا (جم طہ، جب طہ) ہیں قطاعی رقبہ ا و پ کے دوچند کو تعبیر کرتا ہے۔

عام قطع زائد $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ ....(۹)

کی صورت میں مثبت شاخ پر کسی نقطہ کے محدد ہیں

لا = ا جمز ع، ما = ب جبز ع ....(۱۰)

اور قطاعی رقبہ $\frac{1}{2}$ ا ب ع ہے۔

مثال ۳۔ قطع مکافی کی مساوات بلحاظ کسی قطر اور راس پر کے مماس کے ہے

ما۲ = ۴ ر لا ....(۱۱)

۲۳۵ اس قطعہ مکافی کا رقبہ جسکو وتر لا = عہ کاٹتا ہے یہ ہے

$$\text{۲ جب سہ} \int_{\text{۰}}^{\text{عہ}} \text{ما فرلا} = \text{۴} \, \text{ا}^{\frac{1}{2}} \, \text{جب سہ} \int_{\text{۰}}^{\text{عہ}} \text{لا}^{\frac{1}{2}} \, \text{فرلا}$$

$$= \frac{\text{۸}}{\text{۳}} \, \text{ا}^{\frac{1}{2}} \, \text{عہ}^{\frac{3}{2}} \, \text{جب سہ} = \frac{\text{۴}}{\text{۳}} \, \text{عہ بہ جب سہ}$$

اگر ۲ بہ وتر کا طول ہو۔

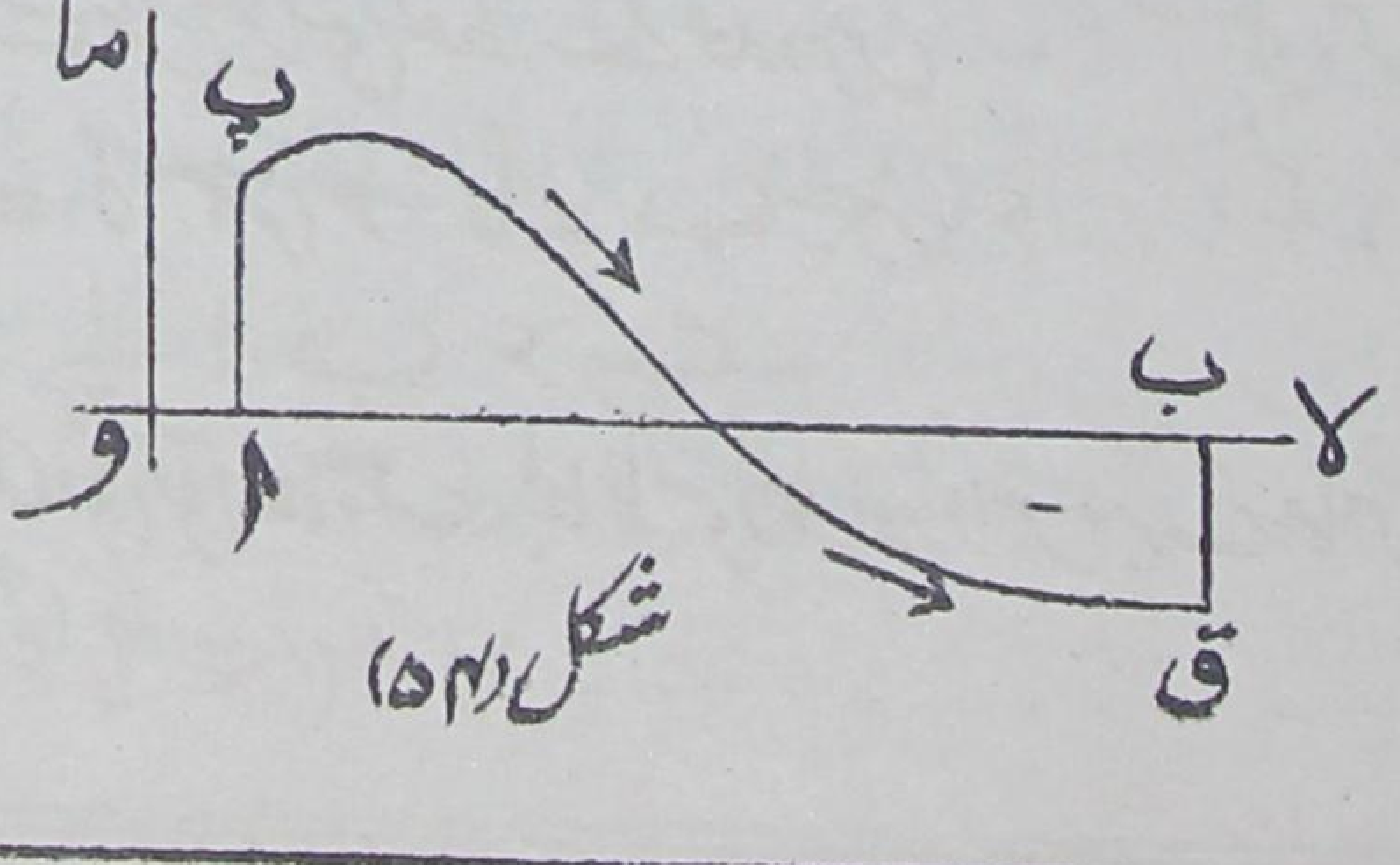
پس کسی قطعہ مکافی کا رقبہ اس مستطیل کے دو تہائی کے مساوی ہے جس کا ایک ضلع قطر پر وتر کا مقطوعہ (عہ) ہے اور دوسرا مرتب پر وتر کا ظل (۲ بہ جب سہ) ہے۔

۱۰۱ ۔ رقبہ کو کیا علامت دی جانی چاہیے؟

دفعہ ۱ میں پہلے سے یہ مان لیا گیا ہے کہ ب > ا اور معین فہ (لا) تکمل کی تمام سعت میں مثبت ہے۔ اگر ان قیود کو چھوڑ دیا جائے تو بآسانی معلوم ہو گا کہ تکملہ

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ (لا) فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{۱})$$

± س کے مساوی ہے جہاں س وہ رقبہ ہے جو منحنی، محور لا اور اطراف کے معینوں کے درمیان گھرا ہوا ہے۔ مثبت علامت لینا چاہیے اگر پ سے ق کی



شکل (۵۴)

سمت میں جانے سے رقبہ دائیں جانب واقع ہو اور منفی علامت (-) لینا چاہئے اگر رقبہ بائیں جانب واقع ہو جہاں پ ا، ق ب لا = ا، لا = ب کے جواب میں منحنی کے متعین ہیں*۔ اگر منحنی ا، ب کے درمیان محور لا کو کاٹتا ہے تو تکملہ سے رقبہ کا وہ اضافہ (مثبت یا منفی) حاصل ہوتا ہے جو دائیں طرف والے رقبہ کو بائیں طرف والے رقبہ پر ہے۔ ان تعمیمات کے ساتھ بھی ضابطہ

$$\int_{ا}^{ب} فہ(لا)\ فرلا = \pm س \qquad .... (۲)$$

کا اطلاق صحیح طور پر اسی صورت میں ہو سکتا ہے جبکہ تمام وقفہ ب۔ ا بھر میں لا کی ہر ایک قیمت کے لئے ما یا فہ (لا) کی ایک یگانہ قیمت ہو۔ اگر لا کی بجائے ایک اور مقدار ت، متبوع متغیر قرار دیجائے اور یہ ایسی ہو کہ جیسے ت بڑھے اس کا متناظر نقطہ پ مسلسل طور پر منحنی کے ساتھ+ حرکت کرے تو ضابطہ

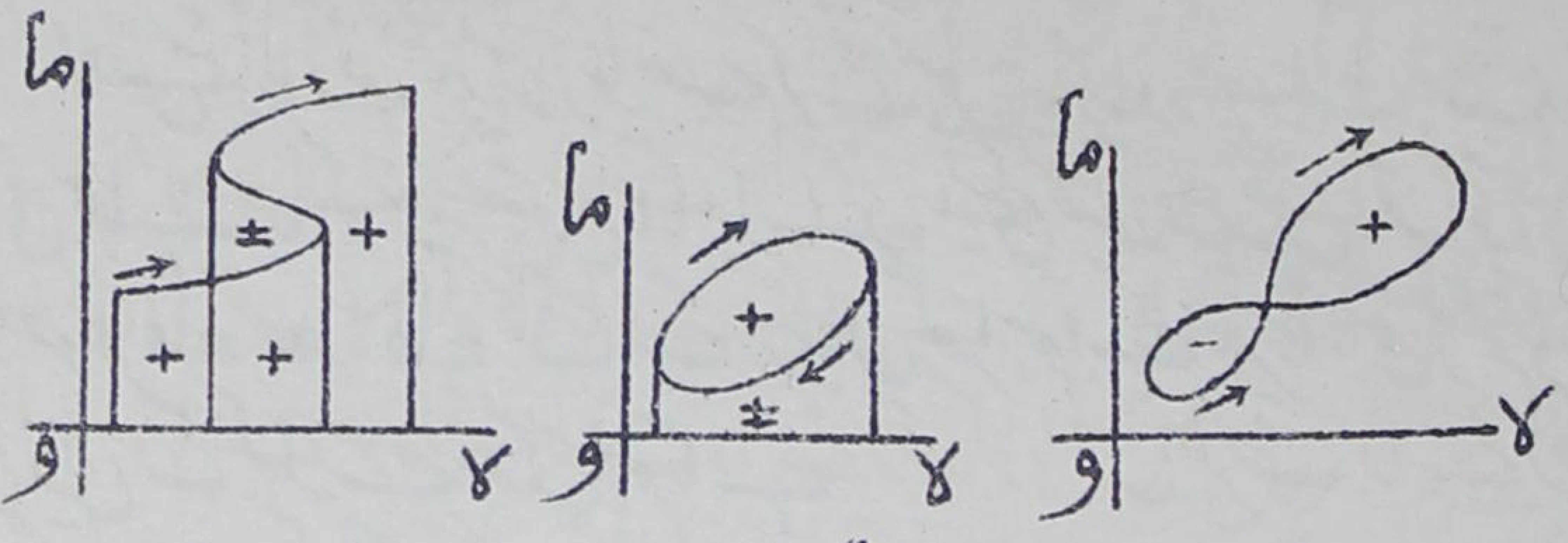
$$\int_{ت_۱}^{ت_۲} ما\ \frac{فرلا}{فرت}\ فرت \qquad .... (۳)$$

سے عام معنوں میں وہ رقبہ تعبیر ہو گا جو منحنی، محور لا اور نقاط پ۱، پ۲ [جنکے لئے ت = ت۱ اور ت = ت۲] کے سینوں کے درمیان گھرا ہوا ہے یعنی

---

* یہ مان لیا گیا ہے کہ محاور لا، ما کی سمتیں وہ ہیں جو شکل ہیں دکھائی گئی ہیں۔ مقابل صورت میں الفاظ "دائیں"، "بائیں" کو باہم بدل دینا چاہئے۔

+ مثلاً نیا متغیر منحنی کی قوس س لی جاسکتی ہے جسے منحنی کے کسی ثابت نقطہ سے ناپنا شروع کیا گیا ہو۔



شکل (۵۵)

معیّن ما کے دائیں جانب حرکت کرنے سے جو رقبہ کا حصہ مرتسم ہوتا ہے اُسکا اضافہ اُس رقبہ پر جو بائیں جانب حرکت کرنے سے مرتسم ہوتا ہے اِس تکملہ سے تعبیر ہوتا ہے۔ یہ اِس صورت میں ہوگا جبکہ ما مثبت ہو۔ اگر ما منفی ہو تو اِس تکملہ سے رقبہ کی وہ زیادتی تعبیر ہوگی جو بائیں جانب کے مرتسم رقبہ کو دائیں جانب کے مرتسمہ رقبہ پر حاصل ہے۔

اگر ت کی کسی قیمت کے لئے پ ایک بند منحنی مرتسم کرکے اپنے پہلے مقام پر واپس آجائے تو تکملہ

$$\int \text{ما} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} \text{فرت} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (۴)$$

کو مناسب حدود کے درمیان لینے سے منحنی کے اندر کا رقبہ حاصل ہوگا اور اسکی علامت + یا - ملے گی بموجب اس کے کہ رقبہ پ کے دائیں یا بائیں جانب رہے جبکہ نقطہ ت کے بدلنے کے ساتھ منحنی مرتسم کرے[+]۔ اگر منحنی اپنے آپ کو کاٹے تو ضابطہ (۴) سے گھرے ہوئے رقبوں کی وہ زیادتی حاصل ہوگی جو دائیں

+ دفعہ ۸۹ میں نمائندہ تصویر کا حوالہ دیا گیا ہے بھاپ نے فشارہ (پسٹن) پر آگے کی مار میں جو کام کیا اسکی زیادتی اُس کام پر جو پیچھے وار مار میں بھاپ خارج کرنے میں ہوا اُس رقبہ سے تعبیر ہوتی ہے جو منحنی کے اندر گھرا ہوا ہے۔ پس اس رقبہ سے وہ خالص توانائی حاصل ہوتی ہے جو فشارہ کو ایک پوری ضرب میں دی گئی۔

طرف کے رقبوں کو بائیں طرف کے رقبوں پر حاصل ہے۔ (دیکھو شکل ۵۵)

بعض اوقات منحنی کا رقبہ معلوم کرنے میں یہ زیادہ سہولت مند ہوتا ہے کہ لا کی بجائے ما کو متغیر متبوع مانا جائے۔ ایسی صورت میں رقبہ جو منحنی، محور ما اور خطوط ما = ھ، ما = ک کے درمیان گھرا ہوا ہے صریحاً اسی قسم کی قیود کے تابع ذیل کے تکملہ سے حاصل ہوتا ہے

$$\int_{\text{ھ}}^{\text{ک}} \text{لا فر ما} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۵})$$

زیادہ عام ضابطہ (۳) کے جواب میں یہ ہوگا

$$\int_{\text{ت}_0}^{\text{ت}_1} \text{لا} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} \text{فر ت} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۶})$$

معائنہ سے معلوم ہوگا کہ علامت کا قاعدہ الٹ دیا جانا چاہئے۔

اگر ایسا کیا جائے تو جملہ $\frac{1}{2}\int \left(\text{لا} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} - \text{ما} \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}\right) \text{فر ت} \ldots\ldots (\text{۷})$

سے بند منحنی کا رقبہ تعبیر ہوتا ہے جہاں ت کے حدود ایسے ہیں کہ نقطہ (لا، ما) اپنے ابتدائی مقام پر واپس آجاتا ہے۔ اب علامت کا کلیہ یہ ہے کہ جملہ (۷) مثبت ہوتا ہے جبکہ رقبہ ت کے بڑھنے کی سمت میں حرکت کرنے والے نقطہ کے بائیں جانب واقع ہوتا ہے۔

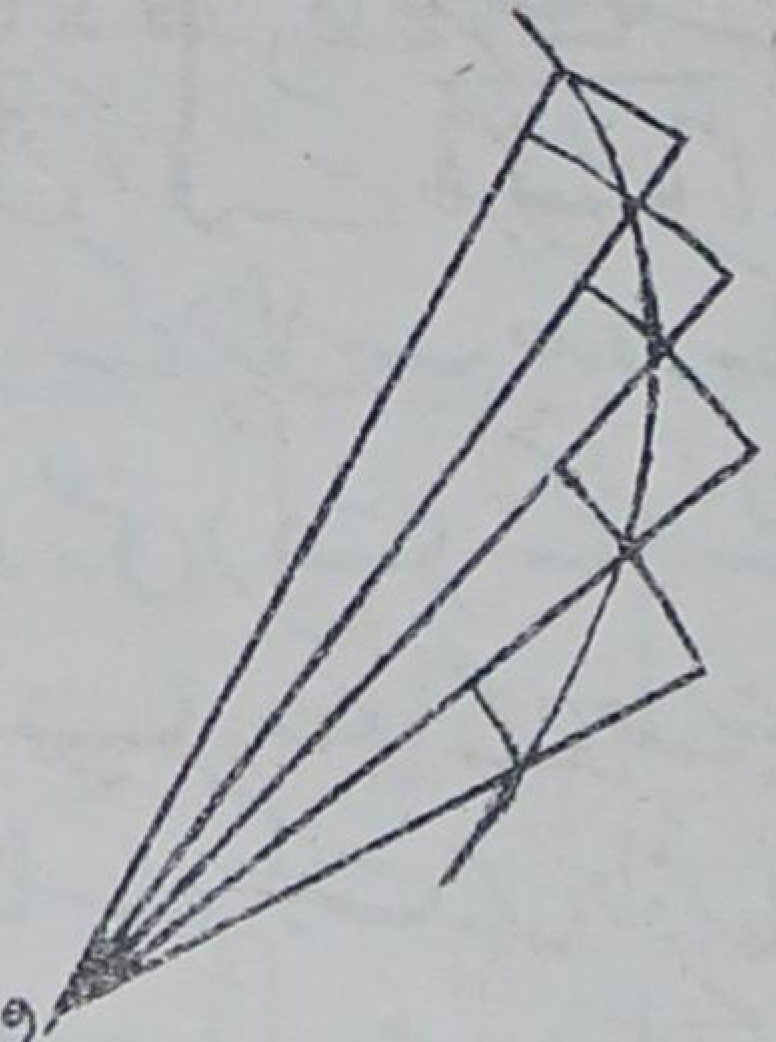
۱۰۲۔ قطبی محددوں کے لحاظ سے رقبے۔ اگر منحنی کی مساوات قطبی محددوں میں

$$\text{ر} = \text{فہ}(\text{طہ}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۱})$$

ہو تو رقبہ جو منحنی اور دو سمتی نیم قطروں طہ = عہ، طہ = بہ کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ اس ضابطہ سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱}{۲}\int_{عه}^{به} ر^{۲} فرطه \quad یا \quad \frac{۱}{۲}\int_{عه}^{به} [فه(طه)]^{۲} فرطه \quad ...(۲)$$

کیونکہ جیسا ساتھ کی شکل میں



و

شکل (۵۶)

دکھایا گیا ہے ہم دائروں کے قطاعوں کی مدد سے گھرنے والا رقبہ س اور گھرا ہوا رقبہ س مرتب کر سکتے ہیں۔ ان میں سے کسی ایک قطاع کا رقبہ $\frac{۱}{۲}$ ر مف طه ہے جہاں ر اس کا نصف قطر ہے اور مف طه اس کا زاویہ اور اسلئے قطاعوں کے کسی ایک سلسلہ کا مجموعہ اس نمونہ کے سلسلہ سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱}{۲}\sum_{عه}^{به} ر^{۲} مف طه \quad .... (۳)$$

اس لئے سلسلہ کی یگانہ انتہا ہے جو (۲) سے تعبیر ہوتی ہے۔

یہاں مان لیا گیا ہے کہ به > عه اور مبدأ میں سے گذرنے والا کوئی سمتی نیم قطر قوس کو صرف ایک نقطہ پر کاٹتا ہے۔ لیکن اگر ایک نیا متغیر متبوع ت ایسا داخل کیا جائے کہ ت کے بڑھنے سے متناظر نقطہ پ منحنی پر مسلسل طور سے حرکت کرے تو جملہ

$$\frac{۱}{۲}\int_{ت}^{ت} ر^{۲} \frac{فرطه}{فرت} فرت \quad .... (۴)$$

۲۲۸ خالص اس رقبہ کو تعبیر کرے گا جو سمتی نیم قطر پ کے ت سے ت تک جانے میں عبور کرتا ہے یعنی اس جملہ سے رقبہ کے ان حصوں کا اضافہ (مثبت یا منفی) جو طه کے بڑھنے کی سمت میں سمتی نیم قطر کے حرکت کرنے سے مرتسم ہوتے ہیں ان حصوں پر جو

مقابل سمت میں مرتسم ہوتے ہیں تعبیر ہوگا۔ علاوہ اس کے اگر ت کے بڑھنے سے نقطہ پ ایک بند منحنی مرتسم کر کے واپس اپنی ابتدائی حالت میں آجائے تو جملہ

$$\frac{1}{2}\int \text{ر}^2 \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\,\text{فرت} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۵})$$

سے ت کے مناسب حدود کے درمیان عام معنوں میں وہ رقبہ ملے گا جو منحنی سے گھرا ہو یعنی (ت کے بدلنے کے ساتھ جیسے نقطہ پ منحنی مرتسم کرتا ہے) اس نقطہ پ کے بائیں جانب جو رقبہ واقع ہوتا ہے اس کی زیادتی اس رقبہ پر جو اثنائے حرکت میں دائیں جانب واقع ہوتا ہے (یہ زیادتی) اس جملہ (۵) سے تعبیر ہوتی ہے۔ مقابلہ کرو دفعہ ۱۰۱ کے ساتھ۔

یہ دیکھا جائے کہ ضابطہ (۵) دفعہ ۱۰۱ کے ضابطہ (۷) کا مماثل ہے۔

اگر دو ساتھ کے نقطوں پ اور ق کے محدد بالترتیب (لا، ما) اور (لا + مف لا، ما + مف ما) ہوں تو عنصری مثلث و پ ق کا رقبہ علامت کی قرارداد کے ماتحت تحلیلی ہندسہ کے ایک ضابطہ کی رو سے یہ ہے

$$\frac{1}{2}\left(\text{لا مف ما} - \text{ما مف لا}\right)$$

ہماری موجودہ ترقیم میں $\frac{1}{2}\text{ر}^2\,\text{مف طہ}$ سے وہی چیز تعبیر ہوتی ہے

مثال ۱۔ دائرہ $\text{ر} = 2\,\text{ا جب طہ}$ .... (۶)

کا رقبہ (دیکھو شکل ۳۸ دفعہ ۶۳) ہے

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \text{ر}^2\,\text{فرطہ} = 2\text{ا}^2\int_0^{\pi}\text{جب}^2\text{طہ فرطہ} = \pi\,\text{ا}^2 \ldots (\text{۷})$$

دراصل یہ محض تصدیق ہے یا مثلثی تکملہ کی قیمت نئی طرح سے دریافت کرتا ہے۔

مثال ۲۔ قطع مکانی

$$\text{ر} = \frac{2\,\text{ا}}{1+\text{جم طہ}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۸})$$

کے قطاع کا رقبہ دو اسکی قطروں کے درمیان یہ ہے

$$\frac{1}{2}\int ر^{2}\, فط = \frac{1}{2} ا^{2} \int قط^{4} \frac{ط}{2}\, فط = \frac{1}{2} ا^{2} \int \left(1 + مس^{2} \frac{ط}{2}\right) قط^{2} \frac{ط}{2}\, فط$$

$$= \frac{1}{2} ا^{2} \left[مس \frac{ط}{2} + \frac{1}{3} مس^{3} \frac{ط}{2} \right] \ldots\ldots (9)$$

جسے مناسب حدود کے درمیان لیا جائے۔ اگر حدود $-\frac{\pi}{2}$ اور $\frac{\pi}{2}$ ہوں تو اس حصہ کا رقبہ ملتا ہے جسے وتر خاص کاٹتا ہے جو $\frac{4}{3} ا^{2}$ ہے۔

۲۳۹ مثال ۳۲۔ قطبی محددوں میں قطع ناقص کی مساوات ہے

$$\frac{1}{ر^{2}} = \frac{جم^{2} ط}{ا^{2}} + \frac{جب^{2} ط}{ب^{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

اس لئے رقبہ ہے

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \frac{ا^{2} ب^{2}\, فط}{ا^{2} جب^{2} ط + ب^{2} جم^{2} ط} = 2 ا^{2} ب^{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{فط}{ا^{2} جب^{2} ط + ب^{2} جم^{2} ط} \ldots\ldots\ldots (11)$$

آخری تکملہ کی قیمت دفعہ ۹۶ میں $\frac{\pi}{2} / (ا\, ب)$ معلوم کی گئی ہے۔ اس لئے مطلوبہ رقبہ π ا ب ہے۔

۱۰۳۔ رقبہ جو ایک متحرک خط اپنی حرکت میں عبور کرتا ہے۔

ایک متحرک خط جس کا طول مستقل یا متغیر ہے اپنی حرکت سے ایک سطح مستوی میں جو رقبہ عبور کرتا ہے وہ اس طرح محسوب ہو سکتا ہے۔

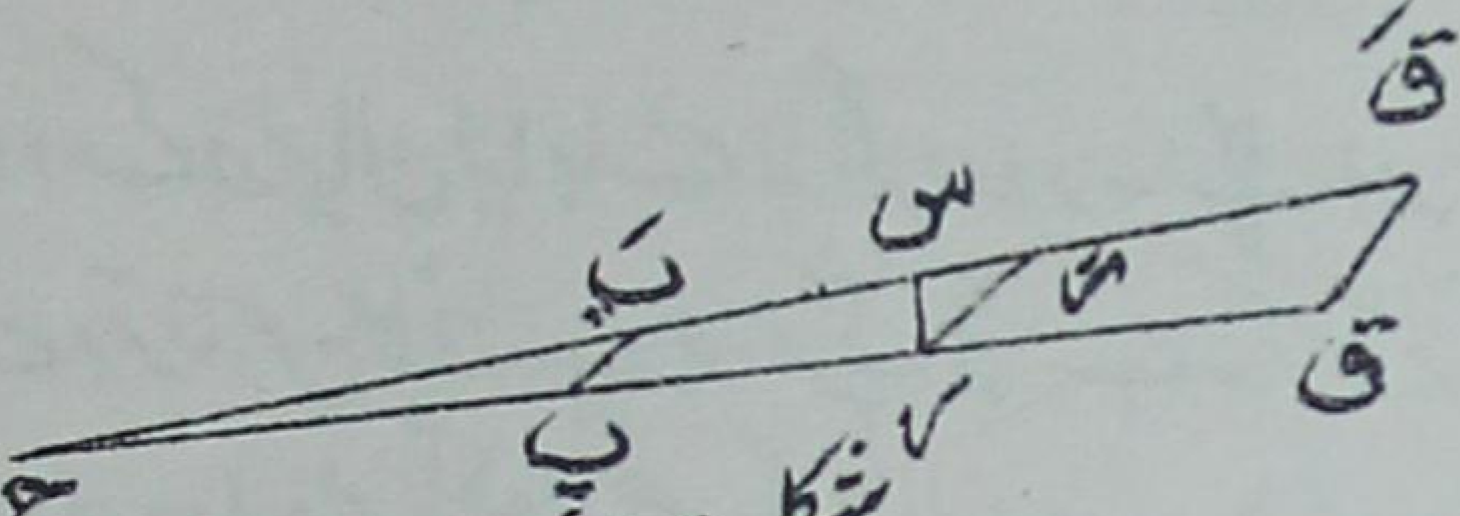
خط کے دو متصل مقام پ ق اور پَ قَ ہیں اور انکی سمتیں ج پر ملتی ہیں۔ فرض کرو کہ پ قَ اور پَ قَ کے وسطی نقطے ر اور رَ ہیں اور ر س ایک دائرہ کی قوس ہے جو ج کو مرکز مان کر کھینچی جائے اگر زاویہ پ ج پَ کو مف ط سے تعبیر کیا جائے تو آخر الامر

رقبہ پ ق قَ پَ $= \Delta$ ق ج قَ $- \Delta$ پ ج پَ

= ½ ج ق² × مف طہ - ½ ج پ² × مف طہ

= پ ق × ½ (ج پ + ج ق) مف طہ

= پ ق × ج ر × مف طہ = پ ق × ر س



شکل (۵۷)

اگر طول پ ق کو ع سے تعبیر کیا جائے اور ر کے عنصری ہٹاؤ کو مف ثہ سے جہاں یہ ہٹاؤ متحرک خط کی عمودی سمت میں ناپا گیا ہے تو رقبہ جو عبور ہوا اس ضابطہ سے تعبیر ہوگا

∫ ع مف ثہ .... (۱)

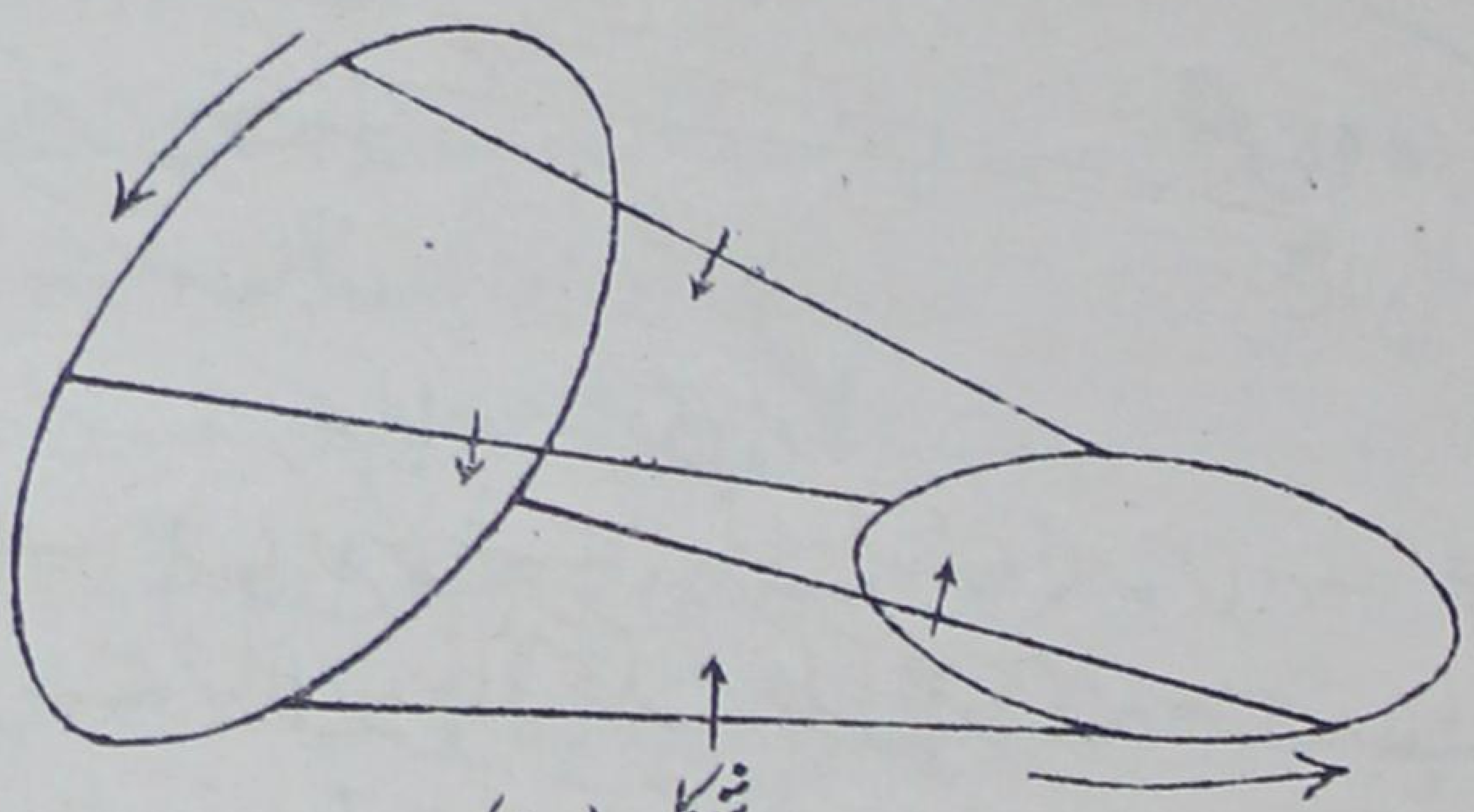
یہ توجہ کے قابل ہے کہ دفعات ۱۰۰، ۱۰۲ کے ضابطے اس نتیجہ کی خاص صورتیں ہیں۔ مثلاً دفعہ ۱۰۰ (۳) حاصل ہوگا اگر رکھیں

ع = ما، مف ثہ = مف لا جب سہ

مندرجہ بالا میں یہ خاموشی سے مان لیا گیا ہے کہ رقبے ہمیشہ ایک ہی سمت میں عبور ہوئے ہیں۔ لیکن یہ آسانی سے معلوم ہوگا کہ ضابطہ (۱) بغیر کسی ایسی قید کے لگ سکیگا بشرطیکہ رقبوں کو مثبت شمار کیا جائے جبکہ یہ خط کے اس جانب عبور ہوں جس جانب مف ثہ کو مثبت خیال کیا جاتا ہے اور اسکی مقابل سمت میں منفی۔ مثلاً جو رقبہ ایک ایسا خط مستقیم عبور کرتا ہے جس کا
۲۴۰ وسطی نقطہ ثابت ہے اس حساب کے مطابق صفر ہوگا۔

تعین کی خاطر ہم فرض کرینگے کہ مف ثہ اس صورت میں مثبت ہے جبکہ ر کی حرکت بلحاظ ایک مشاہد کے جو پ سے ق کی جانب سیدھا ایک خط مستقیم میں دیکھ رہا ہے پ ق کے بائیں جانب ہے۔ اگر پ ق کے

سرے دو بند منحنیوں کو مرتسم کریں اور آخیر میں پ ق اپنے اصلی مقام پر آجائے تو اوپر کی قرارداد کے موافق، ق کے راستہ سے جو رقبہ محیط ہوتا ہے اسکی زیادتی اُس رقبہ پر جو پ کے راستہ سے محیط ہوتا ہے اس تکملہ (۱) سے تعبیر ہوگی لبشرطیکہ ان رقبوں کی علامتیں دفعہ ۱۰۲ کے قاعدہ کے مطابق ہوں۔



شکل (۵۸)

۱۰۴۔ ایمسلر کے سطح پیما (Amsler's planimeter) کا نظریہ۔

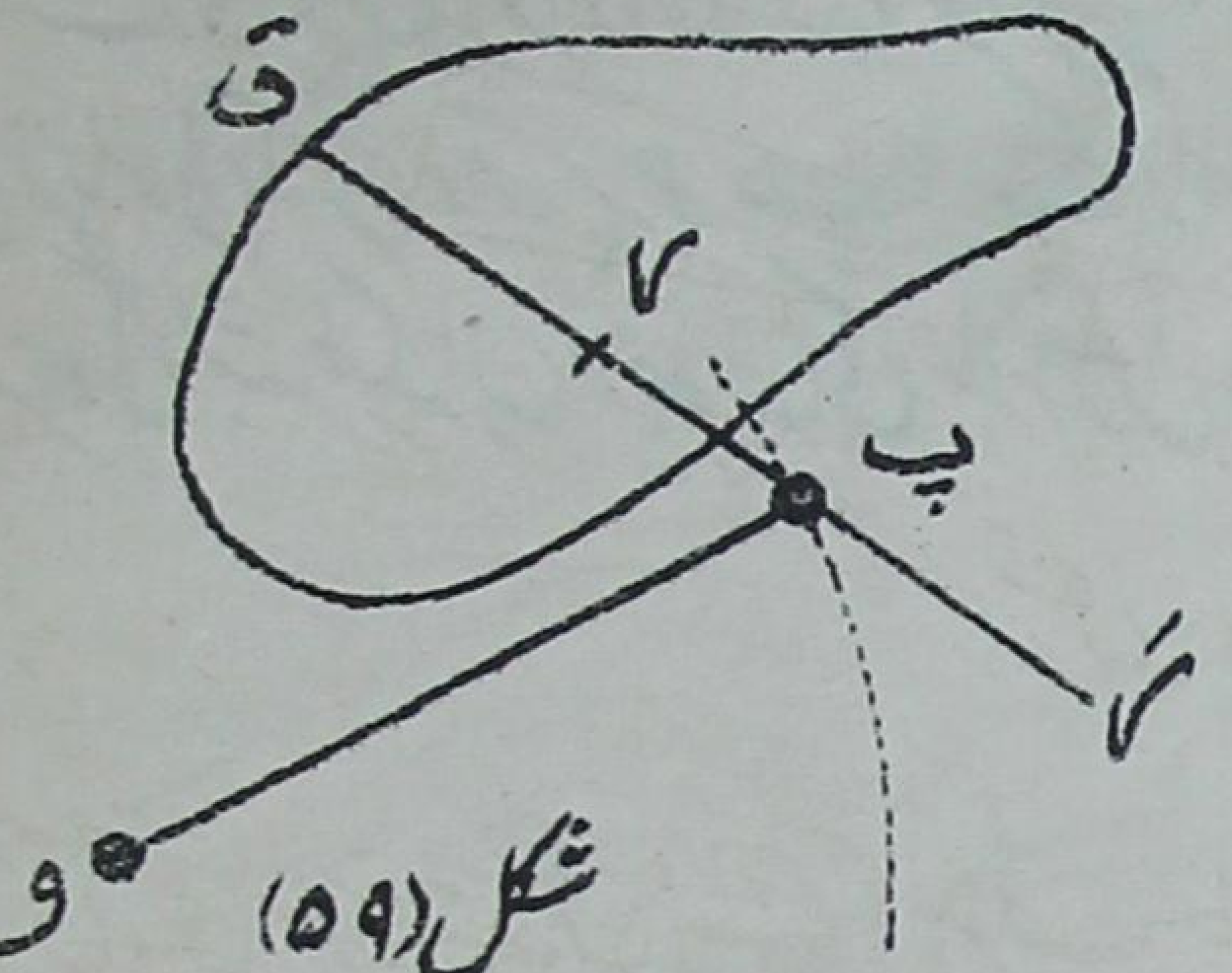
سطح پیما ایک آلہ ہے جس کی مدد سے کاغذ پر کھنچی ہوئی کسی شکل کا رقبہ آلی یا حیلی طریقہ پر دریافت کیا جاتا ہے۔

ایسے کئی آلات ایجاد ہوئے ہیں*، لیکن سب سے سادہ اور مقبول ایمسلر کا سطح پیما ہے جو سنہ ۱۸۵۴ء میں ایجاد ہوا۔ ایمسلر شاف ہاسن (سوئٹزرلینڈ) کا رہنے والا تھا۔ یہ آلہ دو سلاخوں وپ، پ ق پر مشتمل ہے جو آزادانہ طور پر پ پر وصل کی جاتی ہیں۔ سلاخ وپ ایک ثابت نقطہ و کے گرد گھوم سکتی ہے۔ اگر ایک مرتسم نقطہ (پنسل) سلاخ پ ق کے ساتھ ق پر

---

* دیکھو Henrici, 'Report on Planimeters' British Ass. Rep. 1894, p. 496.

لگا دیا جائے اور اس کو ۲۴۱
ایک بند منحنی کے گرد پھرایا
جائے تو پ ایک دائرہ
کی قوس پر آگے پیچھے اہتزاز
کرے گا گویا یہ صفر رقبہ کا
احاطہ طے کرے گا۔ اسلئے
دفعہ ۱۰۳ کے آخر میں جو مسئلہ
بیان ہوا اس کے مطابق



شکل (۵۹)

ق نے جو رقبہ مرتسم کیا وہ مساوی ہوگا

ل ∫ فرثہ ....(۱)

کے جہاں پ ق کا طول ل ہے اور ∫ فرثہ سے پ ق کے وسطی نقطہ ر کی کلی حرکت تعبیر ہوتی ہے جبکہ ہمیشہ اس کا پ ق کے عمود کی سمت میں اندازہ کیا جائے*۔

اب جیسا کہ آلہ کے حقیقی استعمال میں عام طور پر ہوتا ہے اگر پ ق پورا چکر لگانے کے بغیر اپنے اصلی مقام پر واپس آجائے تو ر کی کُلّی حرکت پ ق پر عمود وار سمت میں وہی ہوگی جو خط پ ق کے کسی اور نقطہ مثلاً رَ کی ہے۔ کیونکہ اگر ر، رَ کے راستوں کے متناظر اجزا مف ثہ، مف ثہَ ہوں جنھیں اوپر کی طرح ناپا گیا ہے تو

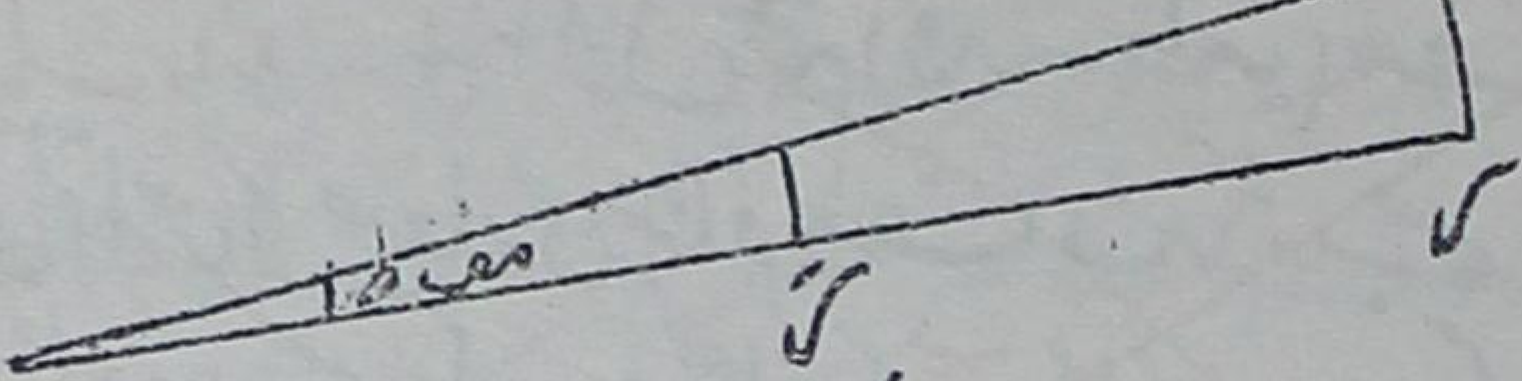
مف ثہ - مف ثہَ = ر رَ مف طہ

جہاں ر رَ کے متصل مقامات کے درمیان زاویہ مف طہ ہے۔ اسلئے

∫ مف ثہ = ∫ مف ثہَ + ر رَ ∫ مف طہ = ∫ مف ثہَ ...(۲)

کیونکہ مفروضہ حالات کے ماتحت ∫ مف طہ = ۰

* بالعموم یہ وہی بات نہیں ہے جو ر کے راستہ کا طول۔



شکل (۶۰)

آلہ کی حقیقی ساخت میں، پہیے کی طرف خارج کئے ہوئے خط ق پ پر کے نقطہ ر کی تکملی یا کلی حرکت، سلاخ کے عمود وار ایک چھوٹے پہیہ کے ذریعے درج (Record) کی جاتی ہے جہاں پہیہ کا محور پ ق کی سمت میں ہوتا ہے جیسے ق کوئی منحنی مرتسم کرتا ہے، پہیہ کاغذ کی سطح میں جس پر منحنی کھنچا ہوا ہے تھوڑا لڑھکتا ہے اور تھوڑا پھسلتا ہے اور پہیہ کا گھومنا ر کے عمودی ہٹاؤ کے عین متناسب ہے۔ پہیے پر درجے لگے ہوتے ہیں اور جزوی گردشوں کے ریکارڈ کے لئے ایک ثابت نمائندہ ہوتا ہے۔ پوری گردشیں ایک Dial and counter کی مدد سے ناپی جاتی ہیں۔

طول پ ق کے بدلنے کے لئے بھی انتظام ہوتا ہے۔ اس سے محض اندراج کا پیمانہ بدلتا ہے۔

زیادہ برجستہ ثبوت تحلیلی طریق پر ہے۔ و میں سے قائم محور لو، فرض کرو کہ و پ، پ ق محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ بالترتیب زاویے طہ اور فہ بناتے ہیں، رکھو و پ = ا، پ ق = ل تو ق کے محدد

۲۴۲ حسب ذیل ہیں

لا = ا جم طہ + ل جم فہ، ما = ا جب طہ + ل جب فہ ..(۳)

اسلئے لا مف ما - ما مف لا = (ا جم طہ + ل جم فہ) (ا جم طہ مف طہ + ل جم فہ مف فہ)

+ (ا جب طہ + ل جب فہ) (ا جب طہ مف طہ + ل جب فہ مف فہ)

= ا² مف طہ + ل² مف فہ + ا ل جم (فہ - طہ) (مف طہ + مف فہ)

= مف {ا² طہ + ل² فہ + ۲ ا ل جب (فہ - طہ)}

+ ۲ ا ل جم (فہ - طہ) مف طہ ..... (۴)

پ ق میں کے کسی نقطہ ر، کا صغاری ہٹاؤ مف ثہ، جسے پ ق پر عمودوار ناپا جائے، دو ہٹاؤں سے مرکب ہوگا، ایک ہٹاؤ پ کے لحاظ سے، دوسرا خود پ کا ہٹاؤ جسے پ ق کی عمودوار سمت میں تحلیل کیا جائے۔ اسلئے

اگر پ ر = ب تو

مف ثہ = ب مف فہ + ا مف طہ × جم (فہ - طہ) ..... (۵)

اس لئے ½ (لا مف ما - ما مف لا)

= ½ مف {ا² طہ + ل (ل - ب) فہ + ۲ ا ل جب (فہ - طہ)}

+ ل مف ثہ .... (۶)

اس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر ق اس طور پر پورا حلقہ مرتسم کرے کہ طہ اور فہ واپس اپنی ابتدائی قیمتوں پر عود کریں تو

½ ∫ (لا مف ما - ما مف لا) = ∫ ل مف ثہ ..... (۷)

دائیں جانب کا جملہ دفعہ ۱۰۱ (۷) کی رو سے اس رقبہ کے مساوی ہے جو حلقہ سے گھرا ہوا ہے۔

۱۰۵ - مجسموں کے حجم - ایسے مجسم کے "حجم" کی بھی عام تعریف کرنا جو بالتمام مستوی سطحوں سے گھرا ہوا ہو کسی نہ کسی شکل میں "انتہائی قیمت" کے تخیل کو داخل کئے بغیر ناممکن ہے۔

اقلیدسی طریقوں سے یہ ضرور ثابت ہو سکتا ہے کہ دو قائم متوازی السطوحوں کو ایک دوسرے کے ساتھ جو نسبت ہوتی ہے وہ ان نسبتوں سے مرکب ہوتی ہے جو ایک کے تین متراکز کناروں کو ایک ایک کرکے دوسرے کے تین متراکز کناروں کے ساتھ (نسبتیں) ہوں۔ اور زیادہ عام طور پر دو منشوروں

کو ایک دوسرے کے ساتھ جو نسبت ہوتی ہے وہ اُن کے ارتفاعوں کی نسبت اور ان کے قاعدوں کی نسبت سے مرکب ہوتی ہے۔ اس طریق پر کسی منشور اور اکائی مکعب کی باہمی نسبت کی تعریف کی جاسکتی ہے۔

لیکن ایک دئے ہوئے کثیر السطوح کو منشوروں کی محدود تعداد میں کاٹنا عام طور پر ممکن نہیں۔ سادہ اور عام طریقہ یہ ہے کہ اس کو مضلع مخروطوں (میناروں) میں کاٹا جائے جن کے مشترک راس اندر کے کسی نقطہ ہ پر ملیں اور کثیر سطحی کے چہرے ان کے قاعدے ہوں۔ لیکن مینار اور منشور کے حجموں کا مقابلہ بغیر انتہائی قیمت کے تخیل کو داخل کرنے کے نہیں ہو سکتا۔ مثلثی منشور کو البتہ مساوی ارتفاع اور مساوی قاعدوں والے تین میناروں میں کاٹا جاسکتا ہے (اقلیدس م ۱۲ ش ۷) ۳۴۳
لیکن صفاری عناصر کے تخیل کو شامل کئے بغیر ان میناروں کو آپس میں مساوی ثابت نہیں کیا جاسکتا۔

ایسے مجسم کے حجم کی عام تعریف جو کسی طرح کی سطحوں مستوی یا منحنی سے گھرا ہوا ہو ایسے ہی مرتب ہو سکتی ہے جیسے مستوی شکل کے رقبہ کی صورت میں (شکل ۹۹)۔ ہمیشہ دو شکلیں بنانا ممکن ہوگا جو منشوروں سے بنی ہوئی ہوں، ان میں سے ایک دئے ہوئے مجسم کو گھیرے اور دوسری مجسم سے گھری ہوئی ہو اور ان کے حجموں کا فرق اتنا کم ہو جتنا ہم چاہیں۔ ان میں سے کسی ایک شکل کے حجم کی انتہائی قیمت کو جب ان شکلوں کا فرق لاانتہا کم ہو جائے بطور تعریف کے اختیار کر لیا جاتا ہے کہ یہ دئے ہوئے مجسم کا "حجم" ہے۔ پہلے کی طرح ہم اس امر کا اطمینان کر سکتے ہیں کہ یہ انتہائی قیمت یگانہ ہے۔

مستوی متوازی سروں والے کسی اسطوانہ (قائم یا مائل) کا حجم کسی سرے کے رقبہ اور سروں کے درمیان کے عمودی فاصلہ کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔ کیونکہ حائط اور نیز محیط منشوری شکلیں بنائی جاسکتی ہیں جن کے قاعدے ایسے کثیر الاضلاع ہیں جو اسطوانہ کے قاعدہ کا احاطہ کرتے ہیں اور اس سے محیط ہو جاتے ہیں۔ اوپر کا بیان ان میں سے ہر شکل کے لئے درست ہے۔ اسلئے انتہائی کے لئے بھی اسطوانہ کے لئے بھی درست ہے۔ دائری اسطوانہ کا حجم اسلئے $\pi r^2 f$ ہے

جہاں ا قاعدہ کا نصف قطر ہے اور ف اس کا ارتفاع ۔ اسی طرح متوازی مستوی سروں والے اسطوانہ کا حجم معلوم ہوگیا ۔ اب اگر ہم چاہیں تو بطور ضمنی اشکال کے جو اوپر عام تعریف میں استعمال کی گئی ہیں منشوروں کی بجائے ایسے اسطوانے استعمال کر سکتے ہیں ۔ کسی طریقہ سے بھی آخری انتہا لازماً وہی ہونی چاہیئے ۔

۱۰۶ ۔ کسی مجسم کے حجم کے لئے عام جملہ ۔

محور لا کو کسی مناسب سمت میں کھینچ لیا جائے ۔ مبدأ سے فاصلہ لا پر ایک سطح مستوی لیکر جو محور پر عمود ہو اگر مجسم کو تراشا جائے تو فرض کرو کہ اس تراش کا رقبہ ف (لا) ہے ۔ اگر وقفہ مف لا پر محور لا کے عمود دار مستوی سطحوں کا نظام کھینچا جائے تو ظاہر ہے کہ حجم مطلوبہ ذیل کے مجموعہ کی انتہا ہوگی

$$\sum \text{ف (لا) مف لا} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

کیونکہ اس مجموعہ کا ہر جزو ایک اسطوانہ کے حجم کو تعبیر کرتا ہے جس کا ارتفاع مف لا ہے اور قاعدہ ف (لا) ۔ اسلئے حجم مطلوبہ حاصل ہوگا اس ضابطہ سے

$$\int \text{ف (لا) فر لا} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

جہاں لا کو مناسب حدود کے اندر لیا جانا چاہیئے ۔

مثال ۱ ۔ مخروط (یا مینار) کی صورت میں جو قائم یا مائل ہو اور کسی قاعدہ پر کھڑا ہو مبدأ ۲۴۴
و راس پہ لو اور محور لا قاعدہ پر عمود دار ۔ فرض کرو کہ قاعدہ کا رقبہ ا ہے، اور ارتفاع ف تو مبدأ و سے فاصلہ لا پر تراش کا رقبہ

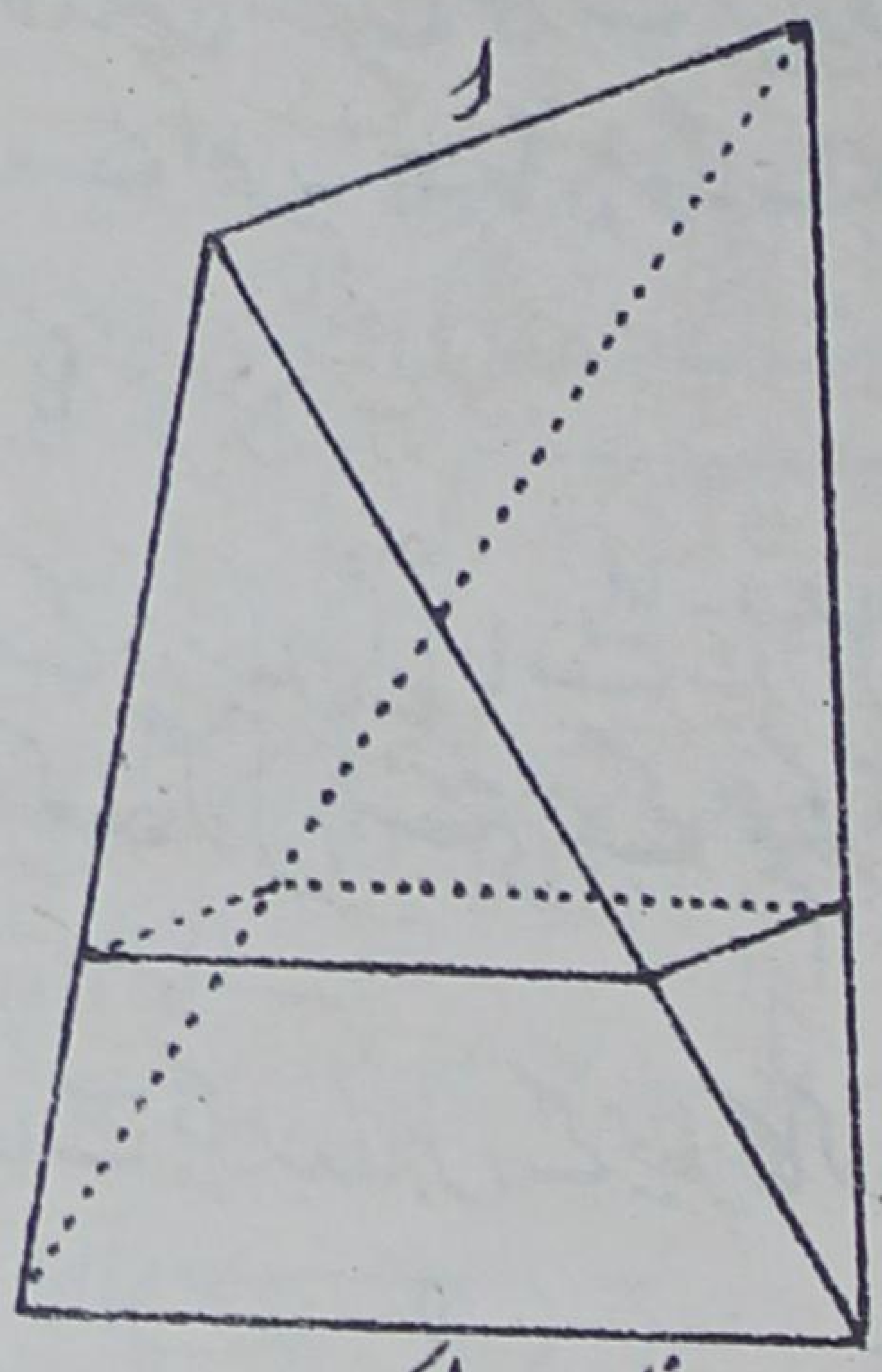
$$\text{ف (لا)} = \left(\frac{\text{لا}}{\text{ھ}}\right)^2 \text{ا} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

کیونکہ متشابہ رقبے متناظر اضلاع کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں ۔ اس لئے حجم

$$= \frac{\text{ا}}{\text{ف}^2} \int_{۰}^{\text{ف}} \text{لا}^2 \,\text{فر لا} \quad \text{یا} \quad \frac{۱}{۳} \text{ف ا} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

یعنی قاعدہ کے رقبہ اور ارتفاع کے حاصل ضرب کے ایک تہائی کے مساوی ہے۔

شمال ۲ - چار سطحی کا حجم ہے $\frac{۱}{۶}$ ص ا اَ جب عہ ....(۵)
جہاں ا، اَ مقابل کے کناروں کے طول ہیں، ص اِن کے درمیان کم سے کم فاصلہ ہے اور عہ اُنکی سمتوں کے درمیان زاویہ ہے۔



شکل (۶۱ اَ)

چار سطحی کو سروں ا، اَ کے متوازی سطحوں سے تراشکر باریک پتروں یا چادروں میں تقسیم کرو۔ یہ تراشیں کم سے کم فاصلہ ص پر عمود وار ہونگی۔ شکل (۶۱ اَ) کے حوالہ سے ظاہر ہے کہ نظام کے اُس سمتوی کی تراشش جو سرے ا سے فاصلہ لا پر واقع ہے ایک متوازی الاضلاع شکل ہوگی جس کے اضلاع ہیں

$$\frac{\text{لا}}{\text{ص}} \times \text{اَ} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ص} - \text{لا}}{\text{ص}} \times \text{ا}$$

۲۴۵ اور اس کا رقبہ ہے $\frac{\text{ا اَ لا}}{\text{ص}^2}(\text{ص} - \text{لا})\ \text{جب عہ}$

اس لئے چار سطحی کا حجم ہے $= \frac{\text{ا اَ}}{\text{ص}^2}\ \text{جب عہ} \int_0^{\text{ص}} \text{لا}(\text{ص} - \text{لا})\ \text{فلا}$

جو دی ہوئی قیمت میں تحویل ہو جاتا ہے۔

۱۰۷۔ گردشی مجسم۔ فرض کرو کہ تکوینی منحنی

ما = ف (لا) .... (۱)

ہے، محور لا تشاکل کا محور ہے اور مجسم مستوی سیرول سے گھرا ہوا ہے جو محور لا پر عمود ہیں۔ اس صورت میں رقبہ ف (لا) اس دائرہ کا رقبہ ہے جس کا نیم قطر ما ہے اور یہ π ما^{۲} ہوگا۔ اس لئے مطلوبہ حجم ہے

$\int$ π ما^{۲} فرلا .... (۲)

جبکہ اسے مناسب حدود کے درمیان لیا جائے۔ دراصل اس مجموعہ کا ہر عنصر جس کی انتہا اوپر کا تکملہ ہے ایک گول تختی کے حجم کو تعبیر کرتا ہے جس کی موٹائی مف لا ہے اور رقبہ π ما^{۲}۔

مثال ۱۔ دائرہ کی مساوات جبکہ مبدأ اس کے محیط پر کا کوئی نقطہ ہو یہ ہے

ما^{۲} = لا (۲ ا - لا) .... (۳)

اس لئے قطعہ کرہ کا حجم جس کا ارتفاع ف ہو یہ ہے

π $\int_{۰}^{ف}$ لا (۲ ا - لا) فرلا = π $\left[\text{ا لا}^{۲} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۳}\right]_{۰}^{ف}$

= π ف^{۲} (ا - $\frac{ف}{۳}$) .... (۴)

جہاں ا کرہ کا نیم قطر ہے۔ پورے کرہ کے لئے ف = ۲ ا اور حجم ہے $\frac{۴ \pi ا^{۳}}{۳}$

یا حائط مستدیر اسطوانہ کے حجم (π ا^{۲} × ۲ ا) کا دو تہائی۔

مثال ۲۔ منحنی ما^{۲} = ۴ ا لا .... (۵)

کو محور لا کے گرد گھمانے سے جو مکافی نما پیدا ہوتا ہے اس کے قطعہ یا حصے کا حجم جس کا ارتفاع ف ہو یہ ہے

$$\pi \int_{\text{ب}}^{\text{ف}} \text{ما}^2\, \text{فرلا} = 4\text{ا}\pi \left[\frac{\text{لا}^2}{2}\right]_{\text{ب}}^{\text{ف}} = 2\pi\, \text{ا}\, \text{ف}^2 \quad \ldots\ldots (6)$$

اگر قاعدہ کا نیم قطر ب ہو تو $\text{ب}^2 = 4\text{ا ف}$۔ اس لئے حجم ہے $\frac{1}{2}\pi\, \text{ب}^2 \times \text{ف}$
یا اسی قاعدہ اور اسی بلندی کے اسطوانہ کے حجم کا آدھا۔

مثال ۳۔ لنگر چھلے کا حجم دریافت کرو جو دائرہ

$$\text{لا}^2 + (\text{ما} - \text{ا})^2 = \text{ب}^2 \quad \ldots\ldots (7)$$

کو محور لا کے گرد پھرانے سے پیدا ہوا ہے جہاں ا > ب، دیکھو شکل (۲۲)۔
لا = −ب اور لا = ب کے درمیان لا کی ہر ایک قیمت کے لئے ما کی دو قیمتیں ہیں فرض کرو ما_1، ما_2 یعنی

$$\text{ما}_1 = \text{ا} + \sqrt{\text{ب}^2 - \text{لا}^2}, \quad \text{ما}_2 = \text{ا} - \sqrt{\text{ب}^2 - \text{لا}^2} \quad \ldots\ldots (8)$$

چھلے کی تراشش کا رقبہ جبکہ اسے محور لا پر عمود وار مستوی سے کاٹا جائے ہوگا

$$\pi\, \text{ما}_1^2 - \pi\, \text{ما}_2^2 = 4\pi\, \text{ا} \sqrt{\text{ب}^2 - \text{لا}^2} \quad \ldots\ldots (9)$$

اور مطلوبہ حجم ہے

$$4\pi\, \text{ا} \int_{-\text{ب}}^{\text{ب}} \sqrt{\text{ب}^2 - \text{لا}^2}\, \text{فرلا} = 2\pi^2\, \text{ا}\, \text{ب}^2 \quad \ldots\ldots (10)$$

دفعہ ۹۶ مثال ۵ کی رو سے۔
یہ حجم اس اسطوانہ کے حجم کے مساوی ہے جس کی تراش ($\pi\, \text{ب}^2$) چھلے کی تراش کے مساوی ہو اور جس کا طول ($2\pi\, \text{ا}$) اس دائرہ کے محیط کے مساوی ہو جو تکوینی دائرہ کا مرکز مرتسم کرتا ہے

۱۰۸۔ بعض متعلق صورتیں۔ دفعہ ۱۰۶ کے عام ضابطہ (۲) کی اور مثالیں درج کی جاتی ہیں۔

مثال ۱۔ ناقص مکافی نما

$$2\text{لا} = \frac{\text{ما}^2}{\text{پ}} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ق}} \quad \ldots\ldots (1)$$

کی تراش مستوی لا = مستقل سے ایک ناقص ہے جس کے نیم محور $\sqrt{2\text{پ لا}}$ اور

$\sqrt{\text{۲ق لا}}$ ہیں اور اس لئے اسکا رقبہ $\text{۲}\pi\sqrt{\text{پ ق لا}}$ ہے۔

اس لئے مستوی لا = ف، مجسم سے جو قطعہ کاٹتا ہے اس کا حجم ہے

$$\text{۲}\pi\sqrt{\text{پ ق}}\int_{\text{۰}}^{\text{ف}}\text{لا فر لا} = \pi\sqrt{\text{ب ق}}\ \text{ف}^{\text{۲}} \quad \text{....(۲)}$$

یہ اس اسطوانہ کے نصف حجم کے مساوی ہے جس کا ارتفاع وہی ف ہو اور وہ اسی ناقصی قاعدہ پر قائم ہو۔

مثال ۲۔ ناقص نما

$$\frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{ا}^{\text{۲}}} + \frac{\text{ما}^{\text{۲}}}{\text{ب}^{\text{۲}}} + \frac{\text{ی}^{\text{۲}}}{\text{ج}^{\text{۲}}} = \text{۱} \quad \text{.........(۳)}$$

میں مستوی لا = مستقل، سے تراش ایک ناقص ہے جس کے نیم محور ہیں

$$\text{ب}\sqrt{\text{۱} - \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{ا}^{\text{۲}}}} \quad \text{اور} \quad \text{ج}\sqrt{\text{۱} - \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{ا}^{\text{۲}}}} \quad \text{.........(۴)}$$

اور جس کا رقبہ ہے

$$\pi\,\text{ب ج}\left(\text{۱} - \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{ا}^{\text{۲}}}\right) \quad \text{.........(۵)}$$

کسی دو مستویوں کے درمیان کے حصہ کا حجم جبکہ یہ مستوی محور لا پر عمود وار ہوں یہ ہے ۲۴۷

$$\pi\,\text{ب ج}\int\left(\text{۱} - \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{ا}^{\text{۲}}}\right)\text{فر لا} \quad \text{.........(۶)}$$

جسے لا کے مناسب حدود کے درمیان لیا جائے۔ کل حجم کے لئے لا کے حدود $\pm$ ا ہیں اور کل حجم ہے $\frac{\text{۴}}{\text{۳}}\pi$ ا ب ج۔

۱۰۹ - سمپسن کا قاعدہ۔ اوپر کے اکثر نتائج دراصل ایک عام ضابطہ میں شامل ہیں جو ایسی تمام صورتوں میں لگ سکتا ہے جہاں محور لا پر عمود وار مستوی تراش کا رقبہ لا کا دوسرے درجہ کا تفاعل ہو۔ ایسی صورت میں دو متوازی مستویوں کے درمیان کا حجم محض ان تراشوں

کے رقبوں اور اِن کے عین درمیان کی تراش سے کے رقبے اور سِروں کے مستویوں کے درمیان کے وقفے (۲ ف) کی رقوم میں حاصل ہو سکتا ہے چونکہ دو درجی تفاعل کی صورت لا میں ایک مستقل جمع کرنے سے نہیں بدلتی تاہم مبدا کو بآسانی وسطی تراش میں لے سکتے ہیں۔ رکھو

$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{ا} + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج}\,\text{لا}^{۲} \quad\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اس طرح

$$\int_{-\text{ف}}^{\text{ف}} \text{ف}(\text{لا})\,\text{فرلا} = ۲\,\text{ا}\,\text{ف} + \frac{۲\,\text{ج}\,\text{ف}^{۳}}{۳} \quad\ldots\ldots (۲)$$

تراشوں لا = - ف، لا = ۰، لا = ف کے رقبوں کو بالترتیب $\text{س}_{۱}$، $\text{س}_{۲}$، $\text{س}_{۳}$ سے تعبیر کرو، اس طرح

$$\text{ا} - \text{ب}\,\text{ف} + \text{ج}\,\text{ف}^{۲} = \text{س}_{۱}،\quad \text{ا} = \text{س}_{۲}،\quad \text{ا} + \text{ب}\,\text{ف} + \text{ج}\,\text{ف}^{۲} = \text{س}_{۳} \quad\ldots\ldots (۳)$$

جس سے

$$\int_{-\text{ف}}^{\text{ف}} \text{ف}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \frac{۱}{۳}\,\text{ف}\,(\text{س}_{۱} + ۴\,\text{س}_{۲} + \text{س}_{۳}) \quad\ldots\ldots (۴)$$

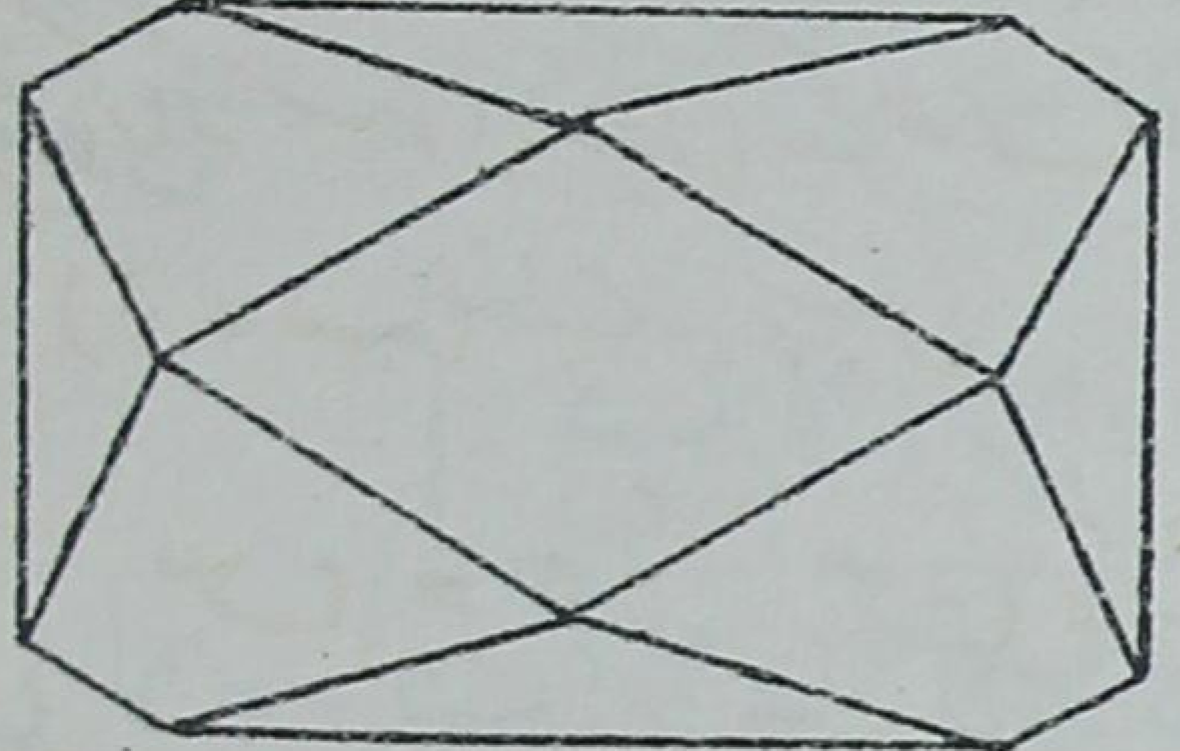
یہی وہ ضابطہ ہے جسکی طرف اوپر اشارہ کیا گیا ہے۔ اسکی تعبیر یہ بھی ہو سکتی ہے کہ مجسم کی اوسطہ تراش ہے

$$\frac{۱}{۶}\,(\text{س}_{۱} + ۴\,\text{س}_{۲} + \text{س}_{۳}) \quad\ldots\ldots (۵)$$

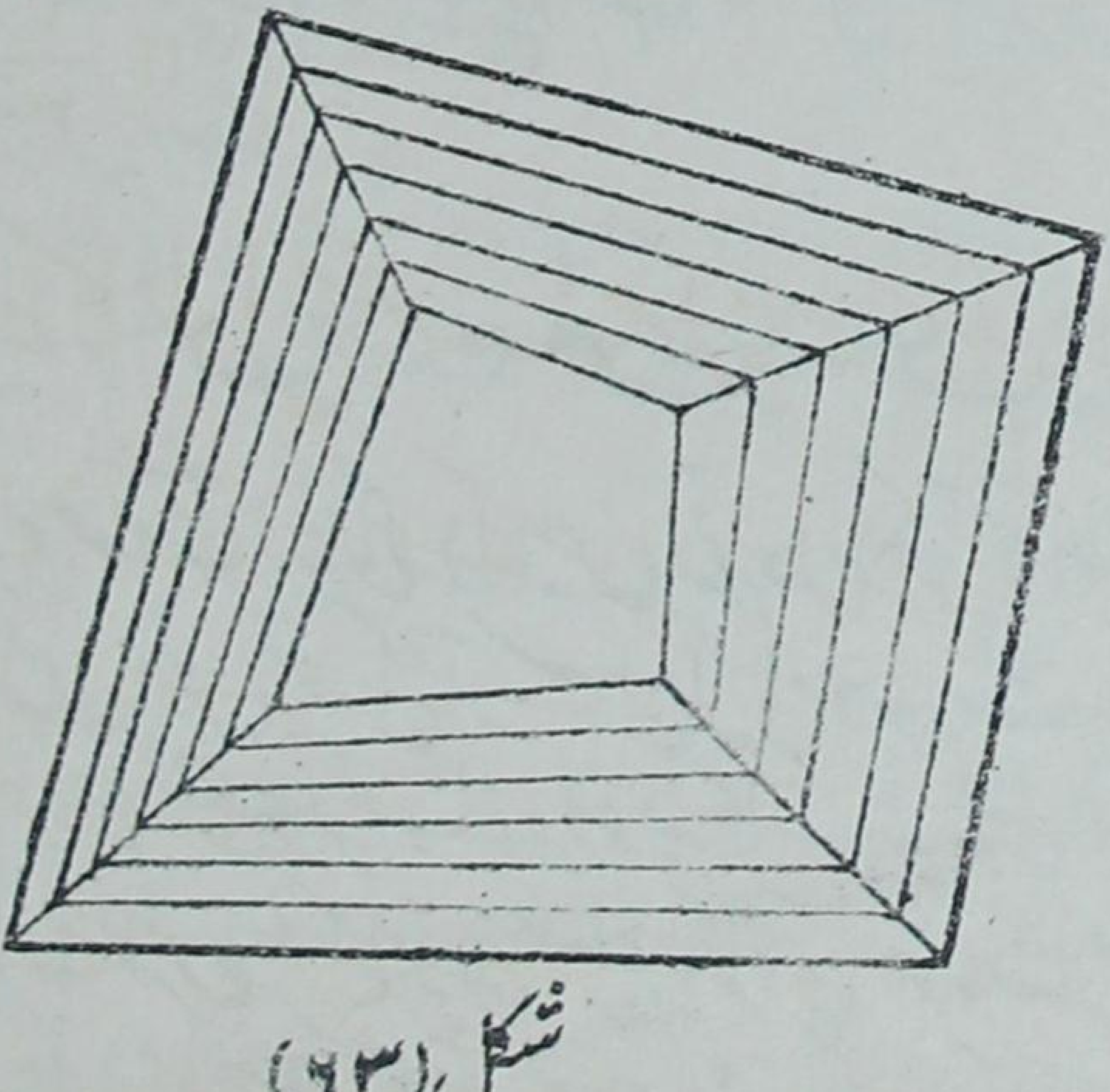
یہ بآسانی معلوم ہو سکتا ہے کہ (۱) میں رقم د $\text{لا}^{۳}$ کا اضافہ (۴) کی شکل پر کوئی اثر نہیں رکھیگا۔ پس اس نتیجہ کی توسیع ایسی صورت کے لئے بھی ہوتی ہے جہاں ف (لا) تیسرے درجہ کا ہے۔

ضابطہ (۱) صریحاً مخروط، مخروط مضلع یا کرہ کی صورت میں لگ سکتا ہے نیز یہ مکافی نما، ناقص نما یا زائد نما کی صورت میں بھی لگ سکتا ہے بشرطیکہ

احاطہ کرنے والی تراشیں صدری محور پر عمود وار ہوں۔ جو طالب علم درجہ دوم کی سطحوں کے نظریہ سے واقف ہے وہ آسانی سے دیکھ لیگا کہ یہ آخری شرط ضروری نہیں ہے۔ ایسے مجسم کی صورت بھی موجودہ قاعدہ کے تحت آتی ہے جہاں مجسم دو متوازی مستوی کثیر زاوی رخوں اور اطراف میں مستوی رخوں سے، جو مثلث ہوں یا منحرف گھرا ہوا ہو۔ اسمیں ہم وہ صورت بھی شامل کر سکتے ہیں جہاں بعض یا سب طرفی پہلو ایسی منحنی سطحیں ہوں (زائدی مکافی نما) جن کی تکوین خطوط مستقیم سے ہوتی ہے جو کثیر الاضلاعوں کے مستویوں کے متوازی حرکت کرتے ہیں اور جن میں سے ہر ایک خط دو ایسے خطوط مستقیم کو قطع کرتا ہے جن میں سے ہر ایک ایک کثیر الاضلاع کے ایک راس کو دوسرے کثیر الاضلاع کے ایک راس سے ساتھ ملاتا ہے۔



شکل (۶۲)



شکل (۶۳)

اور چونکہ ہر کثیر الاضلاعی رخ میں اضلاع کی تعداد لاانتہا بڑھائی جاسکتی ہے، یہ قاعدہ اُس مجسم کی صورت میں بھی لگیگا جو دو مستوی متوازی رخوں سے اور ایک ایسی منحنی سطح سے گھرا ہوا ہو جو ایک خط مستقیم کی حرکت سے پیدا ہوتی ہے اور یہ خط ہمیشہ ان رخوں کے محیطوں سے ملتا ہے۔

مثال ۱۔ ناکمل قائم مستدیر مخروط کا حجم دریافت کرو۔

فرض کرو کہ مستوی سروں کے نصف قطر ا، ب ہیں۔ تو وسطی تراش کا نصف قطر $\frac{1}{2}(\text{ا} + \text{ب})$ ہے۔ پس

$$\text{س}_1 = \pi\,\text{ا}^2،\quad \text{س}_2 = \frac{\pi}{4}(\text{ا}+\text{ب})^2،\quad \text{س}_3 = \pi\,\text{ب}^2$$

اس لئے حجم ہے $\frac{1}{3}\pi\,\text{ف}\,(\text{ا}^2 + \text{ا}\,\text{ب} + \text{ب}^2)$ ...... (۶)

جہاں ناکمل کا ارتفاع ف ہے۔

مثال ۲۔ نصف قطر ا کے مجسم کرہ میں، نصف قطر ب کا ایک اسطوانی سوراخ مرکز میں سے برمایا گیا ہے۔ باقی ماندہ حجم دریافت کرو۔

۲۴۹ یہاں $\text{س}_1 = ۰،\ \text{س}_2 = \pi(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)،\ \text{س}_3 = ۰$۔

اسلئے اوسط تراش $\frac{2}{3}\pi(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)$ ہے۔ سوراخ کا طول $2\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}$ ہے مطلوبہ حجم اس لئے ہے $\frac{4}{3}\pi(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)^{\frac{3}{2}}$ .... (۷)

۱۱۰۔ منحنی خطوط کا طول معلوم کرنا۔ مستقیم الاضلاع شکل کا محیط وہ طول ہے جو شکل کے مختلف اضلاع کے مساوی طول لیکر اِن کو ترتیب وار ایک ہی خط مستقیم میں سروں پر سرے رکھنے سے حاصل ہو۔ چونکہ منحنی خط خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا ہو خط مستقیم کے کسی حصہ پر یوں منطبق نہیں کیا جاسکتا، اِس لئے اِس امر کی تعریف مطلوب ہے کہ ایک منحنی کے "طول" سے کیا مراد ہے۔ عام طور پر یہ تعریف اختیار کیجاتی ہے کہ یہ طول اندر

بنے ہوئے کثیر الاضلاع کے محیط کی انتہا ہے جبکہ اضلاع کا طول لاانتہا کم ہو جائے۔ تسلیم کر لیا گیا ہے کہ سوائے شاید تنہا نقطوں کے منحنی کا ڈھال مسلسل ہے یعنی کسی دو متسلسل نقطوں پ اور ق کے مماسوں کا باہمی میلان، ق کو پ کے کافی قریب لانے سے اتنا کم کیا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔ یہ معلوم ہوگا کہ خاص قیود کے ماتحت مذکورہ بالا انتہا یگانہ ہے، نیز یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ یہ انتہا باہر بنے ہوئے کثیر الاضلاع کی متناظر انتہا کے مساوی ہے۔

اگر منحنی کے دو متسلسل نقطوں پ اور ق کے کارٹیزی محدد (لا، ما) اور (لا + مف لا، ما + مف ما) ہوں تو وتر پ ق کا طول ہے $\sqrt{(\text{مف لا})^2 + (\text{مف ما})^2}$

دفعہ ۵۶ میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ اگر ما اور $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ محدود اور مسلسل ہوں تو نسبت $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$، پ اور ق کے درمیان منحنی کے کسی ایک نقطہ کے لئے مشتق سے تفاضل $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی قیمت کے مساوی ہے۔ اسلئے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی مناسب قیمت منتخب کرنے سے

$$\text{پ ق} = \sqrt{1 + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2}\ \text{مف لا}$$

اندر بنے ہوئے کثیر الاضلاع کے محیط کی انتہائی قیمت اس لئے یہ ہے

$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2}\ \text{فر لا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

جبکہ اس تکمل کو لا کے مناسب حدود کے درمیان لیا جائے۔ اس امر کو کہ یہ انتہائی قیمت یگانہ ہے دفعہ ۹۰ میں ثابت کیا گیا ہے۔

اگر لا کو ما کا تفاعل خیال کیا جائے تو متناظر ضابطہ ہوگا

$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}\right)^2}\ \text{فر ما} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

منحنی کی قوس کو س سے تعبیر کرو جبکہ قوس کو ایک اختیاری نقطہ (لا۱) ۲۵۰
سے ناپنا شروع کیا گیا ہے اور دفعہ ۶۰ کی مانند رکھو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ = مس پہ تو ضابطہ (۱) ہو جاتا ہے

$$\text{س} = \int_{\text{لا۱}}^{\text{لا}} \text{قط پہ فر لا} \quad \ldots\ldots (۳)$$

ضابطہ (۲) کے لئے مماثل استحالہ موجود ہے۔

مثال ۱۔ زنجیرہ $\text{ما} = \text{ج جمز} \frac{\text{لا}}{\text{ج}} \quad \ldots\ldots (۴)$

میں $\int \sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^۲}\ \text{فر لا} = \int \sqrt{۱ + \text{جبز}^۲ \frac{\text{لا}}{\text{ج}}}\ \text{فر لا}$

$$= \int \text{جمز} \frac{\text{لا}}{\text{ج}}\ \text{فر لا} = \text{ج جبز} \frac{\text{لا}}{\text{ج}}$$

چونکہ یہ لا کے ساتھ صفر ہوتا ہے اس لئے سب سے نچلے نقطہ سے اگر س کو ناپا جائے تو

$$\text{س} = \text{ج جبز} \frac{\text{لا}}{\text{ج}} \quad \ldots\ldots (۵)$$

مثال ۲۔ مکافی $\text{ما}^۲ = ۴\ \text{ا لا} \quad \ldots\ldots (۶)$

میں $\int \sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^۲}\ \text{فر لا} = \int \sqrt{\frac{\text{لا} + \text{ا}}{\text{لا}}}\ \text{فر لا} \quad \ldots (۷)$

شمار کنندہ کو پہلے منطق بنانے سے، دفعہ ۶، کے طریقہ سے اسے تکمل کیا جا سکتا ہے۔ یا
رکھو $\text{لا} = \text{ا جبز}^۲ \text{ع}$، اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$۲\ \text{ا} \int \text{جمز}^۲ \text{ع فر ع} = \text{ا} \int (۱ + \text{جمز ۲ع})\ \text{فر ع} = \text{ا} \left(\text{ع} + \frac{۱}{۲} \text{جبز ۲ع}\right) \quad \ldots (۸)$$

چونکہ ع، لا کے ساتھ صفر ہوتا ہے، اس سے قوس کا طول ملتا ہے جبکہ قوس کو اُس سے ناپا جائے۔

مثلاً وترخاص یا معدل کے سرے پر جبز ع = ۱، جمز ع = √۲، ع = لوک (۱ + √۲)، جس سے قوس کا طول اس سرے تک ہے

√۲ [لوک (۱ + √۲) + √۲] = ۲۲۹۵۶ء۲ ½

۱۱۱ـ تعمیم شدہ ضابطے ـ یہ اوپر کی تعریف کا نتیجہ ہے کہ کسی منحنی کی لاانتہا چھوٹی قوس، وتر پ ق کے ساتھ انتہا میں نسبت مساوات رکھتی ہے۔

اس مسئلہ کے باضابطہ ثبوت کے لئے جو دفعہ ۲۲ (۲) کی تعمیم ہے فرض کرو کہ ۲۵۱

پ پ۱، پ۱ پ۲، ..... پن-۱ ق کھلے کثیر الاضلاع کے ضلعے ہیں جو قوس کے اندر بنایا گیا ہے اور صہ۱، صہ۲، صہ۳، ...... صہن وہ زاوئے (مثبت یا منفی) ہیں جو یہ ضلعے وتر پ ق کے ساتھ بناتے ہیں۔ یہ ظاہر ہے کہ

پ ق < پ پ۱ + پ۱ پ۲ + ... + پن-۱ ق ..... (۱)

بخلاف اس کے

پ ق = پ پ۱ جم صہ۱ + پ۱ پ۲ جم صہ۲ + ... + پن-۱ ق جم صہن

> (پ پ۱ + پ۱ پ۲ + ... + پن-۱ ق) جم صہ ... (۲)

جہاں مطلق قیمت کے لحاظ سے صہ تمام زاویوں صہ۱، صہ۲، .... صہن سے بڑا ہے۔ اس لئے نسبت

پ ق / (پ پ۱ + پ۱ پ۲ + ... پن-۱ ق) ...... (۳)

ایک اور جم صہ کے درمیان واقع ہے۔ چونکہ وتر پ پ۱، پ۱ پ۲ ... پن-۱ ق نیز پ ق اپنی قوسوں کے متوازی ہیں جو ان کے مختلف سروں کے درمیان کے نقطوں پر کھینچے جائیں اسلئے ڈھال کے تسلسل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ق کو پ کے کافی طور پر قریب لینے سے ا صہ ا اتنا چھوٹا کیا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔ اسلئے اس کی انتہائی قیمت ایک ہے۔

دفعہ سابق کے (۳) کو بلحاظ تکمل کی اوپر کی حد (لا) کے تفرق کرنے سے اسکی باسانی تصدیق ہوسکتی ہے۔ اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{نہا}\ \frac{\text{مف س}}{\text{مف لا}} = \text{قط پہا} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

چونکہ جب ق کو پ کے لاانتہا قریب لیا جاتا ہے وتر پ ق کی مف لا کے ساتھ جو نسبت ہے اسکی انتہائی قیمت قط پہا ہے اسلئے انتہا میں

$$\text{نہا}\ \frac{\text{مف س}}{\text{پ ق}} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

اوپر کے اصول سے کئی ضروری ضابطے حاصل ہوتے ہیں۔ سب سے پہلے اگر منحنی کے کسی نقطہ پ کے محدد لا، ھا قوس س کے تفاعل خیال کئے جائیں تو شکل ۱۹ دفعہ ۲۴ کے بموجب

$$\text{جم ق پ ر} = \frac{\text{پ ر}}{\text{پ ق}} = \frac{\text{مف لا}}{\text{مف س}} \times \frac{\text{مف س}}{\text{پ ق}}$$

$$\text{جب ق پ ر} = \frac{\text{ق ر}}{\text{پ ق}} = \frac{\text{مف ھا}}{\text{مف س}} \times \frac{\text{مف س}}{\text{پ ق}}$$

$$\text{اس لئے}\quad \text{جم پہا} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر س}}\ ،\ \text{جب پہا} = \frac{\text{فر ھا}}{\text{فر س}} \quad \ldots\ldots (6)$$

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر س}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فر ھا}}{\text{فر س}}\right)^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

۲۵۲

نیز اگر لا، ھا کسی اور متغیر ت کے تفاعل ہوں تو

$$\text{پ ق} = \sqrt{\left(\frac{\text{مف لا}}{\text{مف ت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{مف ھا}}{\text{مف ت}}\right)^2}\ \text{مف ت}$$

$$\text{اس لئے}\quad \text{نہا}\ \frac{\text{پ ق}}{\text{مف ت}} = \sqrt{\left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فر ھا}}{\text{فر ت}}\right)^2}$$

یا $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \sqrt{\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^2}$ ....(۸)

اس لئے $\text{س} = \int \sqrt{\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^2}\ \text{فرت}$ ....(۹)

اسے دفعہ ۱۱۰ (۱) کی تعمیم خیال کیا جا سکتا ہے۔ وہ ضابطہ اس مفروضہ کی بنا پر حاصل کیا گیا تھا کہ قوس زیر بحث کے اندر لا کی ہر قیمت کے لئے ما کی صرف ایک قیمت ہے نتیجہ (۹) اس قید سے آزاد ہے۔ صرف اتنا ضروری ہے کہ جیسے ت بڑھے نقطہ پ منحنی کو مسلسل طور پر مرتسم کرے۔

اسی طرح ضابطہ (۶) کسی قابل تخطیط منحنی کا طول معلوم کرنیکے لئے استعمال ہو سکتا ہے بشرطیکہ پہا سے وہ زاویہ مراد لیا جائے جو س کے بڑھنے کی سمت میں کھینچا ہوا مماس محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ بنائے۔

صریحاً ضابطوں (۸) اور (۹) کی علم حرکت میں تعبیریں مل سکتی ہیں۔ اگر ایک متحرک نقطہ کے کارٹیزی محددوں لا، ما کو وقت ت کے تفاعل خیال کیا جائے تو $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ ، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$ محددوں کے محوروں کی سمت میں ترکیبی رفتاریں ہیں اور اگر ع حقیقی رفتار ہو تو

$\text{ع} = \sqrt{\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^2}$ ....(۱۰)

ضابطے (۸) اور (۹) اس طرح ذیل کے ضابطوں کے معادل ہیں

$\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{ع}$ ، $\text{س} = \int \text{ع فرت}$ ....(۱۱)

مثال۔ قطع ناقص $\text{لا} = \text{ا جب فہ}$ ، $\text{ما} = \text{ب جم فہ}$ ......(۱۲)

میں $\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرفہ}}\right)^2 = \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرفہ}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرفہ}}\right)^2 = \text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{فہ} + \text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{فہ}$

$= \text{ا}^2\,(1 - \text{ز}^2\,\text{جب}^2\,\text{فہ})$ جہاں ز خروج المرکز ہے۔

پس اگر قوس کو محور اصغر کے سرے سے ناپا جائے تو قوس

$$\text{س} = \text{ا} \int_{0}^{\text{فہ}} \sqrt{\text{۱} - \text{ز}^{\text{۲}}\,\text{جب}^{\text{۲}}\,\text{فہ}}\;\; \text{فر فہ} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۱۳})$$

یہ تکملہ ریاضی کے معمولی تفاعلوں کی رقوم میں (محدود صورت میں) نہیں بیان ہو سکتا۔ اسے "دوسری قسم کا ناقصی تکملہ" کہا جاتا ہے اسے ہم ن (ز، فہ) [$E(e, \phi)$] سے تعبیر کرینگے۔ یہ ایک معلومہ تفاعل خیال کیا جا سکتا ہے، لیژانڈ* نے اسکی جدولیں مرتب کی ہیں۔ اس لئے ناقص کا کل محیط اس طرح بیان ہو سکتا ہے

$$\text{۴}\,\text{ا} \int_{0}^{\frac{\pi}{\text{۲}}} \sqrt{\text{۱} - \text{ز}^{\text{۲}}\,\text{جب}^{\text{۲}}\,\text{فہ}}\;\; \text{فر فہ} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۱۴})$$

اس جملہ کے تکملہ کو اس طرح ن (ز، $\frac{\pi}{۲}$) بیان کیا جائیگا یا زیادہ اختصار کے طور پر $\text{ن}_{\text{۱}}$ (ز) سے۔ یہ دوسری قسم کا "پورا ناقصی تکملہ" کہلاتا ہے†۔ مقدار ز تکملہ کا "مقیاس" کہلاتی ہے۔

سلسلوں کے ذریعہ تکملہ (۱۴) کی قیمت معلوم کرنیکے متعلق دیکھو دفعہ ۱۸۰۔

۱۱۲۔ قطبی محددوں کے لحاظ سے قوسیں۔

فرض کرو کہ منحنی کے دو متصل نیم قطر و پ، و پَ ہیں اور پ ن، و پَ پر عمود کھینچا گیا ہے۔ لکھو

$$\text{و پ} = \text{ر}،\quad \text{و پَ} = \text{ر} + \text{مف ر}،\quad \angle\,\text{پ و پَ} = \text{مف طہ}$$

تب دفعہ ۶۳ کے بموجب، پ ن متفاوت ہوگا ر مف طہ سے اور ن پَ متفاوت ہوگا مف ر سے بقدر ایسی مقداروں کے جو بالترتیب پ ن، ن پَ کے مقابلہ میں لاانتہا چھوٹی ہونگی۔ اسلئے پ پَ یا $\sqrt{\text{پ ن}^{\text{۲}} + \text{ن پَ}^{\text{۲}}}$

---

* Traite des Fonctions Elliptiques (1826)

† "پہلی قسم" کا ناقصی تکملہ ہے $\int_{0}^{\text{فہ}} \frac{\text{فر فہ}}{\sqrt{\text{۱} - \text{ز}^{\text{۲}}\,\text{جب}^{\text{۲}}\,\text{فہ}}}$ اور اسے ہم ق (ز، فہ) [$F(e, \phi)$] سے تعبیر کریں گے۔ متناظر "پورا" تکملہ [جسکی اوپر کی حد $\frac{\pi}{۲}$ ہے] $\text{ق}_{\text{۱}}$ (ز) سے تعبیر ہوگا۔

انتہا میں $\sqrt{\text{ر}^2(\text{مف طہ})^2 + (\text{مف ر})^2}$ کے ساتھ مساوات کی نسبت رکھیگا

اس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر طہ متبوع متغیر ہو تو

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}} = \text{نہا}\ \frac{\text{پ پَ}}{\text{مف طہ}} = \sqrt{\text{ر}^2 + \left(\frac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}}\right)^2} \ldots\ldots (1)$$

اور اس لئے $$\text{س} = \int \sqrt{\text{ر}^2 + \left(\frac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}}\right)^2}\ \text{فرطہ} \ldots\ldots (۲)$$

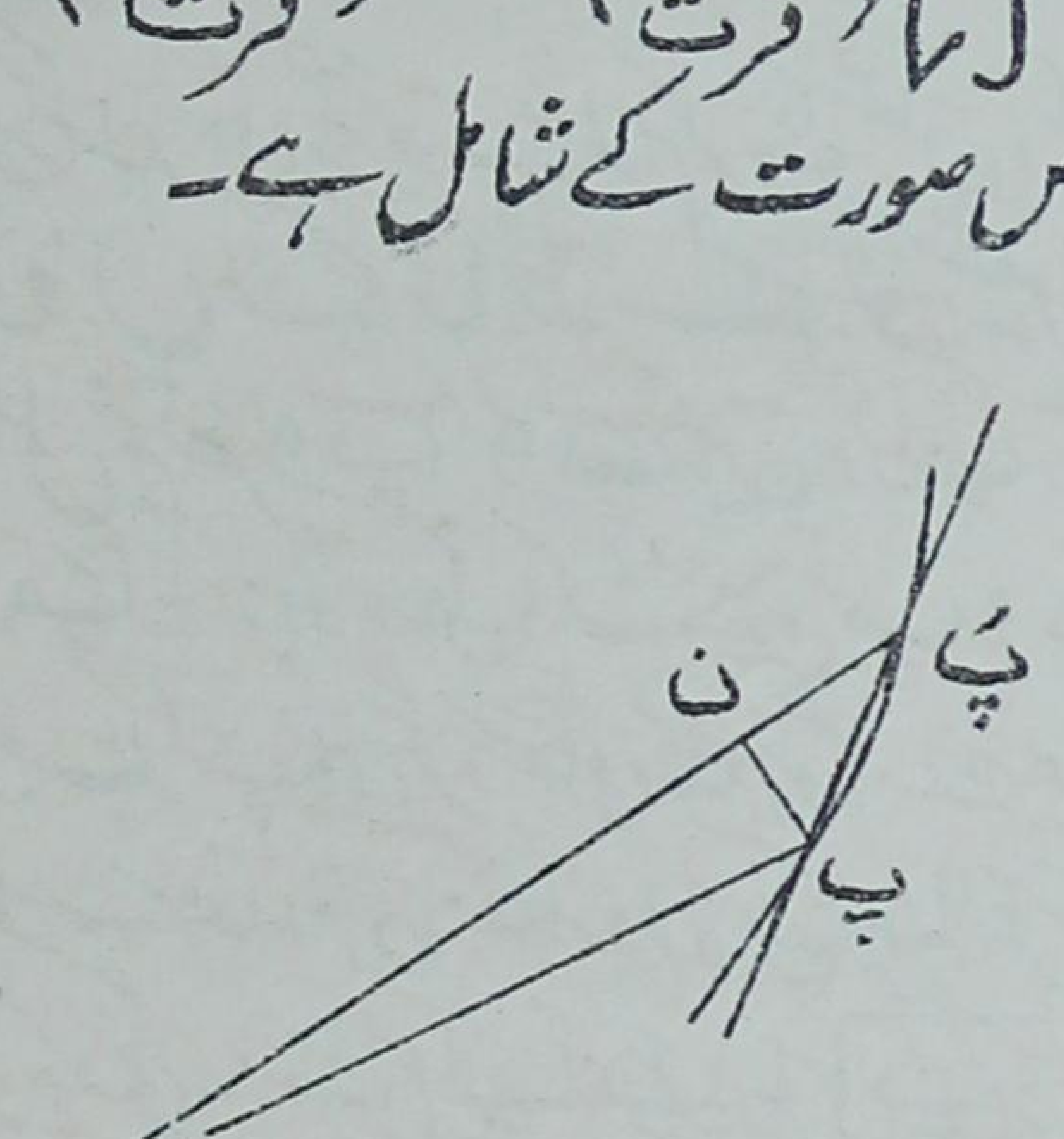
بشرطیکہ تکملہ کو طہ کے مناسب حدود کے اندر لیا جائے۔

اگر ر اور طہ متغیر متبوع ت کے تفاعل ہوں تو

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{نہا}\ \frac{\text{پ پَ}}{\text{مف ت}} = \sqrt{\left(\frac{\text{فرر}}{\text{فرت}}\right)^2 + \text{ر}^2\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2} \ldots\ldots (۳)$$

اس لئے $$\text{س} = \int \sqrt{\left(\frac{\text{فرر}}{\text{فرت}}\right)^2 + \text{ر}^2\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2}\ \text{فرت} \ldots\ldots (۴)$$ ۲۵۴

جس میں (۲) بطور خاص صورت کے شامل ہے۔



شکل (۶۴)

اگر ر، طہ کو قوس س کے تفاعل خیال کیا جائے اور فہ سے وہ زاویہ مراد ہو جو منحنی کا مماس جیسے س کے بڑھنے کی سمت میں کھینچا جائے، سمتی نیم قطر کی مثبت سمت کے ساتھ بنائے تو

$$\text{جم ن پَ پ} = \frac{\text{ن پَ}}{\text{پ پَ}} \text{ ، } \text{جب ن پَ پ} = \frac{\text{پ ن}}{\text{پ پَ}}$$

اس لئے انتہا میں $\text{جم فہ} = \frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}}$ ، $\text{جب فہ} = \frac{\text{ر فر طہ}}{\text{فر س}}$ ......(۵)

ان نتائج کی حرکیاتی توضیح ہوسکتی ہے۔ اگر ایک متحرک نقطہ کی رفتار ع سے تعبیر ہو تو سمتی نیم قطر کی سمت میں اور اس کے علی القوائم رفتاریں بالترتیب ہونگی

$$\left.\begin{aligned} \text{ع جم فہ} &= \frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}} \times \frac{\text{فر س}}{\text{فر ت}} = \frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}} \\ \text{ع جب فہ} &= \frac{\text{ر فر طہ}}{\text{فر س}} \times \frac{\text{فر س}}{\text{فر ت}} = \frac{\text{ر فر طہ}}{\text{فر ت}} \end{aligned}\right\} \text{......(۶)}$$

اور ضابطہ (۴) پہلے کی طرح اس کے معادل ہے

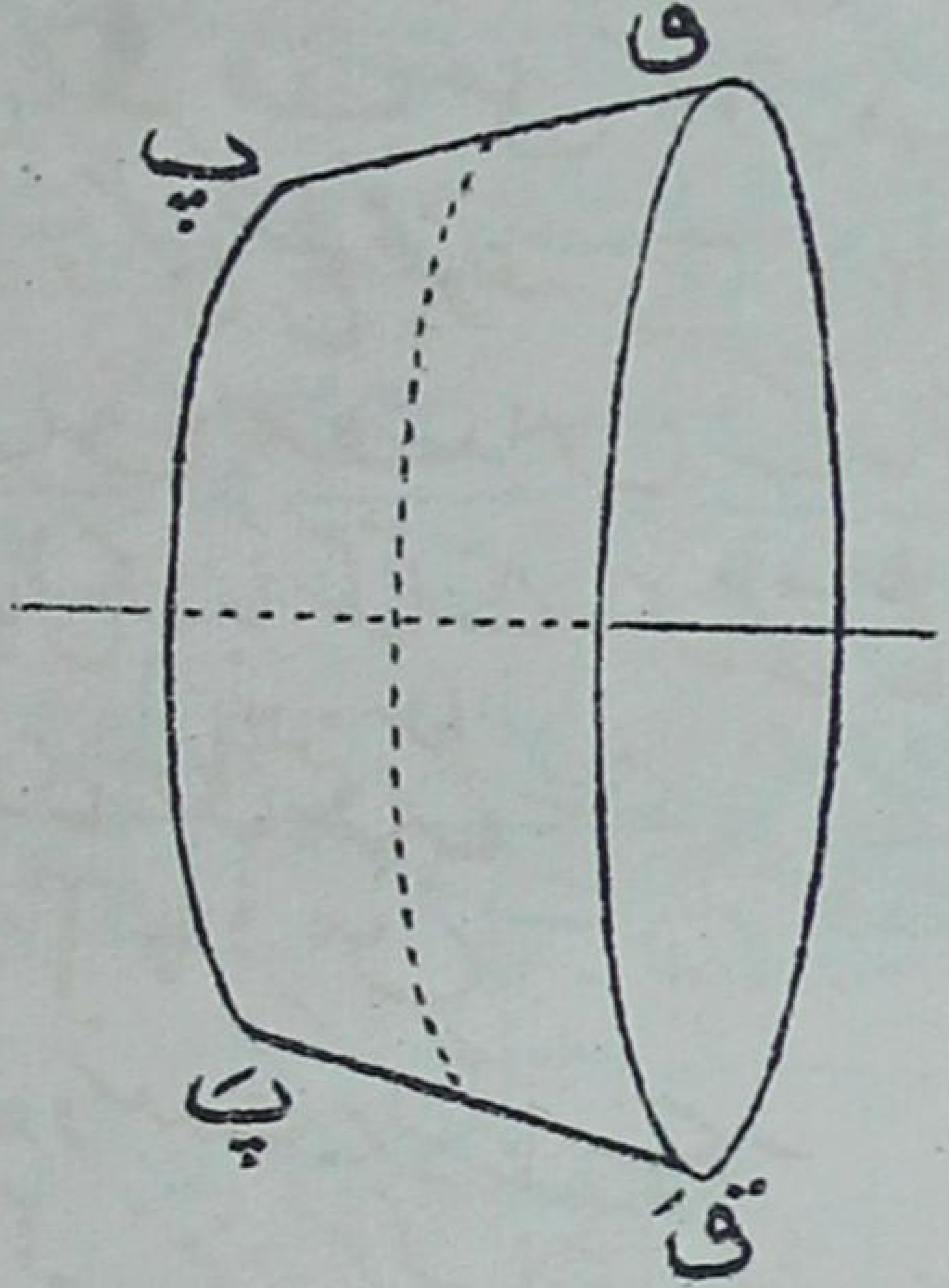
$$\text{س} = \int \text{ع فر ت} \quad \text{......(۷)}$$

۱۱۳۔ گردشی سطحوں کے رقبے۔ منحنی سطح کے رقبہ کی عام تعریف
مرتب کرنا اور پھر یہ ثابت کرنا کہ اس رقبہ کی ایک معین قیمت ہے یہ امور ایک حد تک
نفاست طلب ہیں۔ اس جگہ ہم ایسی گردشی سطح کو بحث میں لائینگے جو محور پر علی القوائم ۲۵۵
مستوی سطحوں سے محدود ہو (محدود ہونا ضروری نہیں)۔

دائری اسطوانے سے ہم شروع کرتے ہیں۔ اسکی منحنی سطح کی یہ تعریف ہوسکتی ہے کہ یہ اندر بنے ہوے منشور کے طرفی رخوں کے رقبوں کے مجموعہ کی انتہائی قیمت ہے۔ ان سب رخوں کا ایک ہی طول ہے اور ان کا مجموعہ اس مشترک طول اور منشور کی جلیبی تراش کے محیط کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔ انتہا میں یہ محیط اسطوانہ کا محیط ہوجاتا ہے۔ اس لئے قائم اسطوانہ کی منحنی سطح جس کا نیم قطر ا اور ارتفاع ف ہو ۲ π ا ف ہے۔

اس کے بعد مخروط کی سطح لو جو محور پر عمود وار دو مستویوں کے درمیان گھری ہوئی ہے

اس کے اندر ناقص مخروط مضلع بنایا جاسکتا ہے جس کے قاعدے متشابہ اور متشابہ الوضع منتظم کثیر الاضلاع ہیں جو احاطہ کرنے والے دو دائروں کے اندر بنائے گئے ہیں زیر بحث منحنی سطح اس ناقص مخروط مضلع کے طرفی رقبہ کی انتہا خیال کیجاسکتی ہے



شکل (۶۵)

یہ رقبہ منحرفوں کی ایک تعداد پر مشتمل ہے جن سب کا ارتفاع مشترک ہے یعنی انکے متوازی اضلاع کے درمیان عمودی فاصلہ۔ اس لئے یہ رقبہ اس مشترک ارتفاع اور ان دو کثیر الاضلاعوں کے محیطوں کے اوسط حسابی کے حاصل ضرب کے مساوی ہے انتہا میں یہ محیط حائط دائروں کے محیط بن جاتے ہیں اور یہ مشترک ارتفاع دائروں سے گھرے ہوے مخروط کا مکون خط بن جاتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں خط مستقیم پ ق کے ایک ایسے محور کے گرد گھومنے سے جو اس کی مستوی میں واقع ہے جو منحنی سطح پیدا ہوتی ہے اس کا رقبہ پ ق اور پ اور ق کے مرتسمہ دائروں کے محیطوں کے اوسط حسابی کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔ اور یہ وہی بات ہے کہ یہ رقبہ پ ق اور اسکے وسطی نقطہ کے مرتسمہ دائرہ کے محیط کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

اسکے بعد وہ سطح لو جو منحنی .... (۱) $\text{ما} = \text{ف}(\text{لا})$

کی قوس محور لا کے گرد گردش کرنے سے پیدا کرتی ہے۔ اس قوس میں نقطوں کی کوئی تعداد لو اور انکو سیدھے خطوں سے ملا کر ایک کھلا کثیر الاضلاع حاصل کرو۔ منحنی سطح کی یہ تعریف اختیار کر لی جاتی ہے کہ کثیر الاضلاع کے ضلعوں سے جو رقبے مرتسم ہوتے ہیں ان کے مجموعہ کی یہ انتہائی قیمت ہے جبکہ اضلاع کے طول کو لا انتہا کم کیا جائے۔ اس لئے اگر مکون منحنی کے کسی عنصر مف س کا وتر پ ق ہو اور پ ق کے وسطی نقطہ کا معین ما ہو تو منحنی سطح مجموعہ Σ ۲ π ما × پ ق کی انتہائی ۲۵۶
قیمت ہوگی۔ انتہا میں پ ق، مف س کے ساتھ نسبت مساوات رکھتا ہے اور ما کو منحنی کا معین خیال کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح سطح ۲ π Σ (ما × مف س) کی انتہائی قیمت کے مساوی ہوئی یعنی سطح ہے

$$۲\pi \int ما\, فرس \qquad .... (۲)$$

جبکہ تکملہ کو س کی مناسب وسعت پر لیا گیا ہے۔

مثال ۱۔ کرہ کی صورت میں مکون منحنی کے کسی نقطہ کے محدد ہیں

$$لا = ا\,جم\,طہ،\quad ما = ا\,جب\,طہ \qquad .... (۳)$$

جس سے

$$\frac{فرس}{فرطہ} = ا \qquad .... (۴)$$

پس منطقہ کی سطح جو محور لا پر عمود وار ستویوں سے گھرا ہوا ہو یہ ہوگی

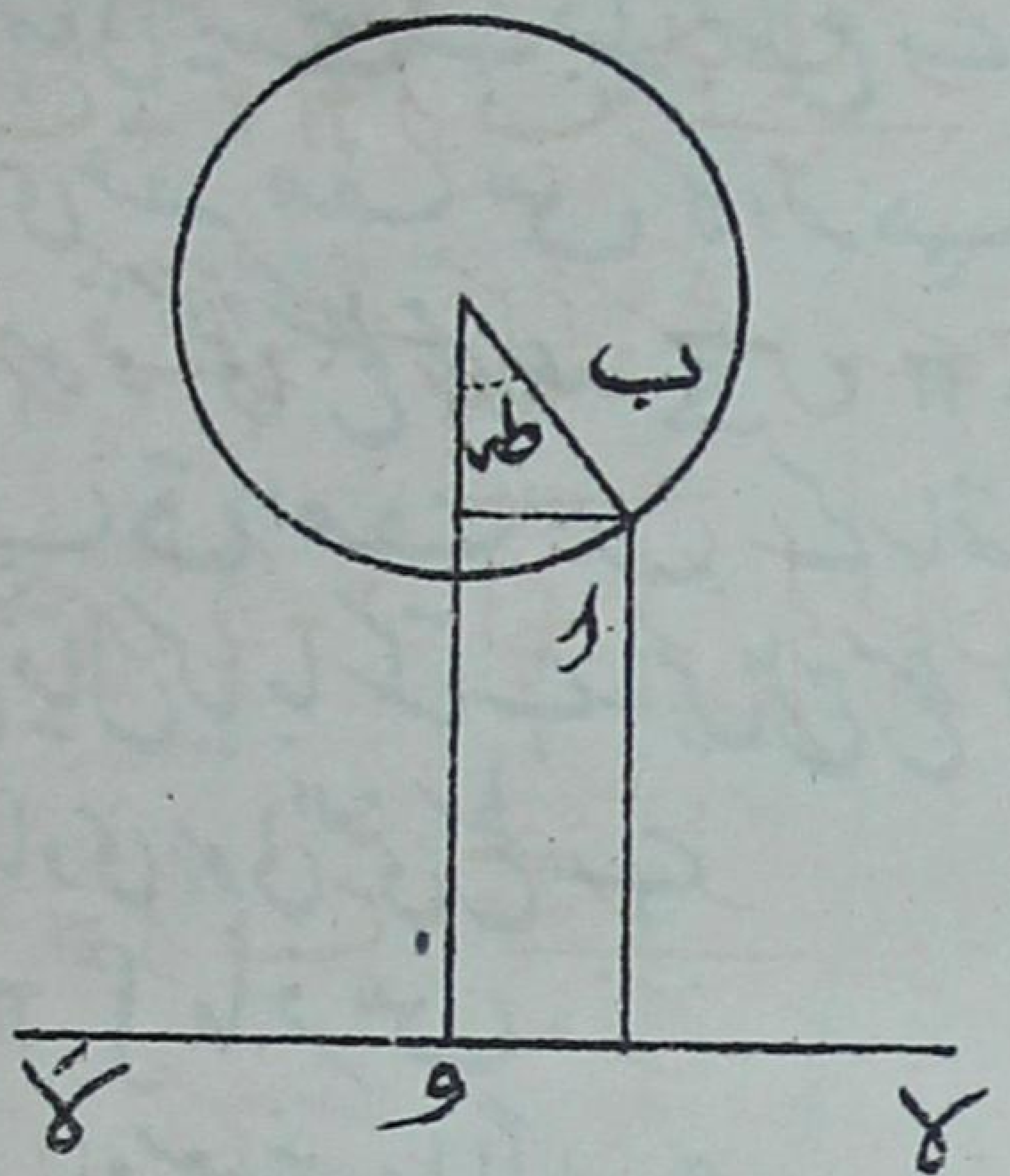
$$۲\pi ا^{۲} \int_{طہ_۱}^{طہ_۲} جب\,طہ\, فرطہ = ۲\pi ا^{۲} (جم\,طہ_۱ - جم\,طہ_۲) = ۲\pi ا (لا_۱ - لا_۲) \ ...(۵)$$

جہاں لا حقے احاطہ کرنیوالے دائروں سے متعلق ہیں۔ اس لئے کرہ کا منطقہ رقبہ میں اس حائط اسطوانہ کے متناظر منطقہ کے مساوی ہے جس کا محور احاطہ کرنے والے دائروں کے ستویوں پر عمود وار ہے۔ خاص صورت میں کرہ کی کل سطح $= ۲\pi ا \times ۲ ا = ۴\pi ا^{۲}$

مثال ۲۔ ایک دائرہ کا نیم قطر ب ہے۔ اس کی سطح میں ایک خط مستقیم ہے جسکا فاصلہ دائرہ کے مرکز سے ا ہے۔ دائرہ کو اس خط کے گرد پھرانے سے جو چھلہ حاصل ہوتا ہے اسکی سطح دریافت کرو۔

یہاں $لا = ب\,جب\,طہ،\quad ما = ا - ب\,جم\,طہ،\quad \frac{فرس}{فرطہ} = ب \ ....(۶)$

پس ۲π ∫ ما فرس = ۲π ب ∫ (ا - ب جم طه) فرطه .....(۷)



شکل (۲۶)

طه کے حدود ہیں . اور ۲π اور سطح حاصل ہوتی ہے ۲π ب × ۲π ا جو ب
قطر کے قائم اسطوانہ کی منحنی سطح کے مساوی ہے جس کا طول (۲π ا) ہو اور یہ طول
اس دائرہ کے محیط کے مساوی ہے جو مکون دائرہ کا مرکز مرتسم کرتا ہے۔ ۲۵۷

مثال ۳- ناقص لا = ا جب فه، ما = ب جم فه کو محور اعظم کے
گرد پھرانے سے جو مجسم حاصل ہوتا ہے اسکی سطح دریافت کرو۔

۲π ∫ ما فرس = ۲π ∫ ما (فرس / فرفه) فرفه

= ۲π ا ب ∫ √(۱ - ز² جب² فه) فر(جب فه) .....(۹)

دفعہ ۱۱۱ کی رو سے - اب رکھو ز جب فه = جب طه ....(۱۰)

پس تکملہ (۹) = (۲π ا ب / ز) ∫ جم² طه فرطه = (π ا ب / ز) (طه + جب طه جم طه)

.........(۱۱)

کل سطح دریافت کرنیکے لئے اسے فه = ∓ π/۲ کے درمیان یا

$\text{ط} = \mp \text{جب}^{-1}\text{ز}$ کے درمیان لیا جائے ۔ نتیجہ حاصل ہوگا

$$\frac{2\pi\,\text{ا}\,\text{ب}}{\text{ز}}\left\{\text{جب}^{-1}\text{ز} + \text{ز}\sqrt{1-\text{ز}^2}\right\}$$

یا $$2\pi\,\text{ب}^2 + 2\pi\,\text{ا}\,\text{ب}\,\frac{\text{جب}^{-1}\text{ز}}{\text{ز}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۲)$$

اسی طریقہ سے محور اصغر کے گرد ناقص کی گردش سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اسکی

سطح ہے $\frac{2\pi\,\text{ا}\,\text{ب}}{\text{زَ}}\left\{\text{جبز}^{-1}\text{زَ} + \text{زَ}\sqrt{1+\text{زَ}^2}\right\}$ جہاں $\text{زَ} = \frac{\sqrt{\text{ا}^2-\text{ب}^2}}{\text{ب}}$

یا $$2\pi\,\text{ا}^2 + 2\pi\,\text{ا}\,\text{ب}\,\frac{\text{جبز}^{-1}\text{زَ}}{\text{زَ}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۳)$$

اسے اس صورت میں بھی رکھا جا سکتا ہے

$$2\pi\,\text{ا}^2 + \pi\,\text{ب}^2 \times \frac{1}{\text{ز}}\,\text{لوک}\,\frac{1+\text{ز}}{1-\text{ز}} \quad \ldots\ldots (۱۴)$$

۱۱۴ ۔ تقریبی تکمل ۔ ایک محدود تکملہ کی تقریبی قیمت دریافت کرنیکے کئی طریقے ایجاد کئے گئے ہیں جبکہ اس میں کے تفاعل کا نامحدود تکملہ نہ حاصل ہو سکے ۔ اختصار بیان کی خاطر اس مسئلہ کی صرف ہندسی شکل پر غور کیا جائیگا یعنی اس رقبہ کی صرف تقریبی قیمت مطلوب ہے جو ایک دئے ہوئے منحنی، محور لا اور دو معلومہ معینوں کے درمیان واقع ہے ۔

جن طریقوں کا اوپر حوالہ دیا گیا ہے ان سب میں دئے ہوئے حقیقی منحنی کی بجائے ۲۵۸
ایک اور منحنی رکھ دینا مقصود ہوتا ہے جو قریب قریب وہی راستہ رکھتا ہو جو اصلی منحنی کا ہے لیکن یہ آسانی سے تکمل ہونے والے تفاعل سے تعبیر ہو سکے ۔ سب سے آسان اور ناتراشیدہ طریقہ وہ ہے جس میں مساوی فاصلوں پر منحنی کے ن معین کھینچے جاتے ہیں اور ان کے سروں کو خطوط مستقیم کے ذریعہ ملایا جاتا ہے اس طرح منحرفوں کے ایک سلسلہ کا رقبہ مطلوبہ رقبہ کی جگہ اختیار کر لیتا ہے ۔ اگر متصل معینوں کے درمیان فاصلہ ھ ہو اور معینوں کے طول $\text{ع}_1, \text{ع}_2 \ldots \text{ع}_\text{ن}$

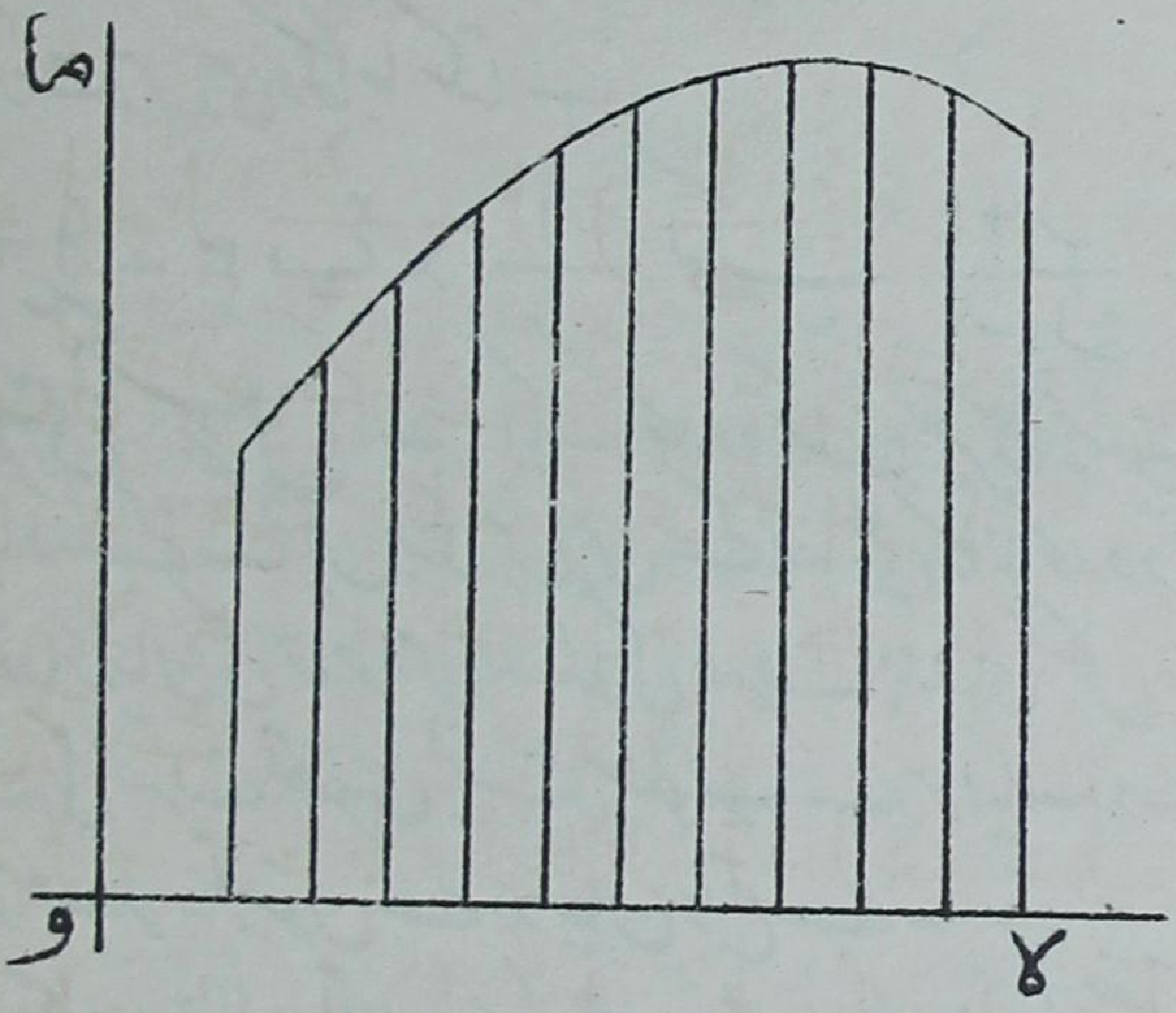
ہوں تو منحرفوں کا مجموعہ ہے

$$\frac{1}{2}(\text{ما}_{1}+\text{ما}_{2})\text{ھ}+\frac{1}{2}(\text{ما}_{2}+\text{ما}_{3})\text{ھ}+\ldots+\frac{1}{2}(\text{ما}_{\text{ن}-2}+\text{ما}_{\text{ن}-1})\text{ھ}+\frac{1}{2}(\text{ما}_{\text{ن}-1}+\text{ما}_{\text{ن}})\text{ھ}$$

$$=\text{ھ}\left\{\frac{1}{2}\text{ما}_{1}+\text{ما}_{2}+\text{ما}_{3}+\ldots+\text{ما}_{\text{ن}-2}+\text{ما}_{\text{ن}-1}+\frac{1}{2}\text{ما}_{\text{ن}}\right\}\ldots\ldots\ldots(1)$$

یعنی پہلے اور آخری معین کے اوسط حسابی میں درمیانی معینوں کا مجموعہ جمع کرو اور نتیجہ کو مشترک وقفہ سے ضرب دو۔

اس طریق سے جو قیمت حاصل ہوگی وہ صریحاً اصلی رقبہ سے زیادہ ہوگی اگر منحنی محور لا کی جانب محدب ہو اور کم ہوگی اگر مقعر ہو۔



شکل (۶۷)

ایک اور طریقہ جو ابتدا میں نیوٹن اور کوٹس* نے دیا وہ یہ ہے کہ ما کے لئے (ن-۱) ویں درجہ کا منطق تکملی جملہ اختیار کیا جائے یعنی

---

*دیکھو کوٹس کا رسالہ De Methodo Differentiali جو Harmonia Mensurarum, Camb. 1722 کے ضمیمہ کے طور پر چھپا۔

$$\text{ما} = \text{ا}_{0} + \text{ا}_{1}\,\text{لا} + \text{ا}_{2}\,\text{لا}^{2} + \ldots\ldots + \text{ا}_{\text{ن}-1}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} \quad \ldots\ldots (۲)$$

۲۵۹ اور پھر سروں ا_{0}، ا_{1}، ا_{2} ...... $\text{ا}_{\text{ن}-1}$ کے لئے قیمتیں دریافت کی جائیں کہ لا کی ن متساوی الفصل قیمتوں کے لئے ما کی معلومہ اور معینہ قیمتیں ما_{1}، ما_{2}، ... $\text{ما}_{\text{ن}}$ ہوں۔ تب رقبہ حاصل ہوتا ہے

$$\int \text{ما}\,\text{فرلا} = \text{ا}_{0}\,\text{لا} + \frac{1}{2}\,\text{ا}_{1}\,\text{لا}^{2} + \frac{1}{3}\,\text{ا}_{2}\,\text{لا}^{3} + \ldots + \frac{1}{\text{ن}}\,\text{ا}_{\text{ن}-1}\,\text{لا}^{\text{ن}} \quad \ldots (۳)$$

جبکہ لا کے مناسب حدود کے درمیان لیا جائے۔

مثلاً تین تساوی الفصل معینوں کی صورت میں مبدأ کو وسطی معین کے پایہ پر لو۔ ہم تسلیم کرتے ہیں

$$\text{ما} = \text{ا}_{0} + \text{ا}_{1}\frac{\text{لا}}{\text{ھ}} + \text{ا}_{2}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ھ}}\right)^{2} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

ترتیب وار ذیل کی شرائط کے تابع

$$\left.\begin{array}{llll} \text{ما} = & \text{ما}_{1} & \text{ما}_{2} & \text{ما}_{3} \\ \text{لا} = & -\text{ھ} & 0 & \text{ھ} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (۵)$$

ان سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا}_{0} - \text{ا}_{1} + \text{ا}_{2} = \text{ما}_{1}،\ \text{ا}_{0} = \text{ما}_{2}،\ \text{ا}_{0} + \text{ا}_{1} + \text{ا}_{2} = \text{ما}_{3} \quad \ldots (۶)$$

پس $\text{ا}_{0} = \text{ما}_{2}$، $\text{ا}_{1} = \frac{1}{2}(\text{ما}_{3} - \text{ما}_{1})$، $\text{ا}_{2} = \frac{1}{2}(\text{ما}_{1} + \text{ما}_{3} - 2\,\text{ما}_{2})$ ....(۷)

اس لئے $\int_{-\text{ھ}}^{\text{ھ}} \text{ما}\,\text{فرلا} = 2\left(\text{ا}_{0} + \frac{1}{3}\,\text{ا}_{2}\right)\text{ھ} = \frac{1}{3}(\text{ما}_{1} + 4\,\text{ما}_{2} + \text{ما}_{3})\,\text{ھ}$ ...(۸)

مقابلہ کرو دفعہ ۱۰۹ کے ساتھ۔

اوپر کا طریقہ اس کے مرادف ہے کہ حقیقی منحنی کی بجائے مکافی کی قوس رکھدی جائے جس کا محور انتصابی ہے۔ اور نتیجہ (۸) منحرف $\frac{1}{2}(\text{ما}_{1} + \text{ما}_{3})\,2\text{ھ}$ اور مکافی قطعہ

$\frac{۲}{۳}\left\{\frac{۱}{۲}(\text{حا}_{۱}+\text{حا}_{۳})-\text{حا}_{۲}\right\}$ ۲ھ کے فرق کو تعبیر کرتا ہے۔

دیکھو دفعہ ۱۰۰ امثال ۳۔

چار متساوی الفصل معینوں کی صورت میں اسی طرح کے عمل سے یہ ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۳}{۸}(\text{حا}_{۱}+۳\,\text{حا}_{۲}+۳\,\text{حا}_{۳}+\text{حا}_{۴})\,\text{ھ} \quad ....(۹)$$

اور پانچ معینوں کی صورت میں ملتا ہے

$$\frac{۲}{۴۵}(۷\,\text{حا}_{۱}+۳۲\,\text{حا}_{۲}+۱۲\,\text{حا}_{۳}+۳۲\,\text{حا}_{۴}+۷\,\text{حا}_{۵})\,\text{ھ} \quad ......(۱۰)$$

معینوں کی تعداد کے بڑھنے سے اس طریقہ میں سر زیادہ بے ڈول* ہوتے ہیں۔ ۲۶۰
سمپسن نے تقریبی رقبہ دریافت کرنیکا ایک سادہ طریقہ ایجاد کیا† مگر اس میں عام طور پر اتنی صحت نہیں ہوتی۔ وقفہ کو معینوں کی طاق تعداد میں تقسیم کرو، پہلے معین سے شروع کر کے متبادل معینوں کے درمیان کا رقبہ مکافی ضابطہ (۸) کے ذریعہ محسوب کرو اور ان نتائج کو جمع کرو۔ اس طرح حاصل ہوگا

$$\frac{۱}{۳}\{\text{حا}_{۱}+۴\,\text{حا}_{۲}+\text{حا}_{۳}$$
$$+\text{حا}_{۳}+۴\,\text{حا}_{۴}+\text{حا}_{۵}$$
$$+\text{حا}_{۵}+۴\,\text{حا}_{۶}+\text{حا}_{۷}$$
$$+\,......$$
$$+\text{حا}_{۲ن-۱}+۴\,\text{حا}_{۲ن}+\text{حا}_{۲ن+۱}\}\,\text{ھ}$$

$$=\frac{۱}{۳}\{(\text{حا}_{۱}+\text{حا}_{۲ن+۱})+۲(\text{حا}_{۳}+\text{حا}_{۵}+...+\text{حا}_{۲ن-۱})+۴(\text{حا}_{۲}+\text{حا}_{۴}+....+\text{حا}_{۲ن})\}\,\text{ھ} \quad ......(۱۱)$$

یعنی پہلے اور آخری معین کا مجموعہ، درمیانی طاق معینوں کے مجموعہ کا دو چند اور جفت معینوں کے مجموعہ کا چہار چند لیکر ان سب کو جمع کرو، اس کل مجموعہ کے ایک تہائی کو مشترک وقفہ ھ کے ساتھ ضرب دو۔

---

* صورتوں ن = ۳، ۴، ۵، ... ۱۱ کے لئے کوٹس نے سر دریافت کئے۔ نیز دیکھو Bertrand, Calcul Integral دفعہ ۳۶۳۔

† Mathematical Dissertations (1743)

مثال۔ ضابطہ $\frac{1}{4}\pi = \int_0^1 \frac{\text{فرلا}}{1+\text{لا}^2}$ ....(۱۲)

سے π کی قیمت محسوب کرو۔

تکمیل کی وسعت کو دس مساوی وقفوں میں تقسیم کرو، یعنی ھ = ؍۱ تو

فا۱ = ۱، فا۲ = ؍۹۹۰۰۹۹۰، فا۳ = ؍۹۶۱۵۳۸۵

فا۴ = ؍۹۱۷۴۳۱۲، فا۵ = ؍۸۶۲۰۶۹۰

فا۶ = ؍۸۰۰۰۰۰۰، فا۷ = ؍۷۳۵۲۹۴۱

فا۸ = ؍۶۷۱۱۴۰۹، فا۹ = ؍۶۰۹۷۵۶۱

فا۱۱ = ؍۵ فا۱۰ = ؍۵۵۲۴۸۶۲

اس لئے فا۱ + فا۱۱ = ۱؍۵، فا۳ + فا۵ + فا۷ + فا۹ = ۳؍۱۶۸۶۵۷۷

فا۲ + فا۴ + فا۶ + فا۸ + فا۱۰ = ۳؍۹۳۱۱۵۷۳

ضابطہ (۱۱) سے حاصل ہوتا ہے

$\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{30}$ (۱؍۵ + ۶؍۳۳۷۳۱۵۴ + ۱۵؍۷۲۴۶۲۹۲)

= ؍۷۸۵۳۹۸۱۵

۲۶۱ صرف سات ہندسے رکھنے سے π = ۳؍۱۴۱۵۹۳

یہ نتیجہ آخری ہندسہ تک درست ہے۔

ضابطہ (۱) سے حاصل ہوتا $\frac{\pi}{4}$ = ؍۷۸۴۹۸۱۵۰

یعنی π = ۳؍۱۳۹۹۲۶ جو تقریباً ...۲ میں بقدر ایک حصہ کے چھوٹا ہے

۱۱۵ - اوسط قیمتیں - فرض کرو کہ سعت (ب - ا) کے اندر لا کی ن متساوی الفصل قیمتوں کے جواب میں ایک تفاعل فا(لا) کی قیمتیں فا۱، فا۲ ...... فان ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ تفاعل کی یہ قیمتیں لا کی ان قیمتوں کے جواب میں ہیں جو ن مساوی وقفوں (ھ) کے وسطی نقاط کو تعبیر کرتے ہیں جن میں سعت تقسیم کر گئی ہے۔ جس انتہائی قیمت کی طرف یہ اوسط حسابی

$\frac{1}{ن}$ (ما + ما + ... + مان) .... (۱)

مائل ہوتی ہے جبکہ ن لاانتہا بڑھتا ہے اس کو تفاعل کی "اوسط قیمت" کہتے ہیں سعت (ب - ا) پر۔

چونکہ ھ = $\frac{ب - ا}{ن}$ ، جملہ (۱) اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\text{ما ھ + ما ھ + ... + مان ھ}}{\text{ب - ا}}$$

اور اسکی انتہائی قیمت جبکہ ن ← ∞ ، ھ ← ۰ یہ ہے

$$\frac{\int_{ا}^{ب} \text{فہ (لا) فرلا}}{\text{ب - ا}} \quad \text{.......... (۲)}$$

ہندسی تعبیر کے موافق اوسط قیمت اُس مستطیل کا ارتفاع ہے جس کا قاعدہ ب - ا ہے اور جس کا رقبہ اس رقبہ کے مساوی ہے جو منحنی ما = فہ (لا) ، اطراف کے معینوں اور محور لا سے گھرا ہوا ہو۔ دیکھو شکل ۴۹ دفعہ ۹۱۔

دفعہ ۹۱ (۳) کا مسئلہ اب یوں بیان ہو سکتا ہے۔ تغیر متبوع کی کسی وسعت پر ایک مسلسل تفاعل کی اوسط قیمت ، اُسی سعت کے اندر تغیر متبوع کی ایک ایک قیمت کے لئے تفاعل کی قیمت کے مساوی ہے۔

دفعہ ۱۱۴ کے مختلف ضابطوں کی اب یہ تعبیر ہو سکتی ہے کہ ان سے ایک معلومہ سعت میں ، تفاعل کی اوسط قیمت کے لئے تقریبی جملے تفاعل کی ایسی قیمتوں کے سلسلہ کی رقوم میں معلوم ہوتے ہیں جو سعت بھر میں متساوی الفصل وقفوں پر لیگئی ہیں۔ مثلاً تین یا چار ایسی قیمتوں کی رقوم میں اوسط قیمتیں کوٹس کے طریقہ سے بالترتیب یہ معلوم ہوتی ہیں

$\frac{1}{6}$ (ما + ۴ ما + ما) ، $\frac{1}{8}$ (ما + ۳ ما + ۳ ما + ما)

اوسط قیمت کے تخیل کو استعمال میں لانے سے پہلے یہ صاف طور پر معلوم ہونا ضروری ہے کہ متغیر متبوع کونسا ہے جسکو (ابتداً میں) مساوی اضافے دئیے گئے ہیں مثلاً اگر ایک ذرہ مستقل اسراع ج کے ساتھ نیچے گر رہا ہو تو رفتار کی اوسط قیمت، سکون سے وقت کے کسی وقفہ ت_1 میں یہ ہے

$$\frac{1}{\text{ت}_1}\int_0^{\text{ت}_1}\text{ع فت}=\frac{1}{\text{ت}_1}\int_0^{\text{ت}_1}\text{ج ت فت}=\tfrac{1}{2}\,\text{ج ت}_1$$

یعنی یہ آخری رفتار کا آدھا ہے۔ لیکن اگر اوسط رفتار فضا (س) کے مساوی چھوٹے اضافوں کے لئے مطلوب ہو تو چونکہ $\text{ع}^2=2\,\text{ج س}$

$$\frac{1}{\text{س}_1}\int_0^{\text{س}_1}\text{ع فس}=\frac{(2\,\text{ج})^{\frac{1}{2}}}{\text{س}_1}\int_0^{\text{س}_1}\text{س}^{\frac{1}{2}}\,\text{فس}=\tfrac{2}{3}(2\,\text{ج س}_1)^{\frac{1}{2}}$$

یہ آخری رفتار کا دو تہائی ہے۔

مثال ۱۔ جب ط کی اوسط قیمت، ۰ سے π تک ط کے متساوی الفصل دفعوں کے لئے ہے

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\text{جب ط فط}=\frac{2}{\pi}=0.6366 \quad\ldots\ldots(3)$$

اس لئے نصف قطر ا کے نصف دائرہ کے معینوں کی اوسط قیمت، جبکہ انہیں قوس کے متساوی الفصل نقطوں میں سے کھینچا جائے ۰٫۶۳۶۶ ا ہے۔

اگر قطر ۲ا پر کے متساوی الفصل نقطوں میں سے معین کھینچے جاتے تو اوسط قیمت ہوتی

$$\frac{1}{2\,\text{ا}}\int_{-\text{ا}}^{\text{ا}}\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}\,\text{فلا}=\tfrac{1}{2}\,\text{ا}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\text{جم}^2\text{ط فط}=\tfrac{1}{4}\pi\,\text{ا} \quad ..(4)$$

یا ۰٫۷۸۵۴ ا۔ یہ بآسانی از خود دیکھا جا سکتا ہے کہ اس آخری اوسط کو کیوں بڑا ہونا چاہئے۔

مثال ۲۔ ایک ٹکیا کی شکل گردش کے مکافی نما کی ہے جو بہت چپٹا ہے۔ اس کی اوسط موٹائی کی نسبت مرکز پر کی موٹائی کے ساتھ دریافت کرو۔

اگر ا، نصف قطر ہو تو مرکز سے فاصلہ ر پر موٹائی کی نسبت مرکز پر کی موٹائی کے ساتھ

ہے $\sqrt{1-\frac{\text{ر}^2}{\text{ا}^2}}$ .... (۵)

اس لئے مطلوبہ نسبت ہے

$\frac{1}{\pi\,\text{ا}^2}\int_0^{\text{ا}}\sqrt{1-\frac{\text{ر}^2}{\text{ا}^2}}\;2\pi\,\text{ر}\,\text{فر}=\frac{2}{3}$ .... (۶)

مثال ۳ - اگر کرہ کی کثافت ث مرکز سے فاصلہ ر کا تفاعل ہو تو حجم کا جزو

$\text{مف ح}=\text{مف}\left(\frac{4}{3}\pi\,\text{ر}^3\right)=4\pi\,\text{ر}^2\,\text{مف ر}$

اوسط کثافت ہے $\bar{\text{ث}}=4\pi\int_0^{\text{ا}}\text{ث}\,\text{ر}^2\,\text{فر}\div\frac{4}{3}\pi\,\text{ا}^3$ ۲۶۳

$=\frac{3}{\text{ا}^3}\int_0^{\text{ا}}\text{ث}\,\text{ر}^2\,\text{فر}$ .... (۷)

اگر ا بیرونی نصف قطر ہو۔
مثلاً اگر $\text{ث}\propto\text{ر}^{n}$ تو اوسط کثافت سطح پر کی کثافت کا $\frac{3}{n+3}$ ہے۔
نیز یہ تسلیم کرنے سے کہ زمین کے اندر

$\text{ث}=\text{ث}_0\left(1-\text{ک}\,\frac{\text{ر}^2}{\text{ا}^2}\right)$ .... (۸)

حاصل ہوتا ہے

$\bar{\text{ث}}=\text{ث}_0\left(1-\frac{3}{5}\text{ک}\right)=\frac{1}{5}\left(2\text{ث}_0+3\text{ث}_1\right)$ ...... (۹)

جہاں ث_1 سطح پر ($\text{ر}=\text{ا}$) کی کثافت ہے۔ اگر کثافت کا اوپر کا قانون زمین کی صورت میں لگ سکے، تب چونکہ $\bar{\text{ث}}=2\text{ث}_1$ (تقریباً) ہمیں حاصل ہوتا ہے
$\text{ث}_0=\frac{7}{2}\text{ث}_1$ یا مرکز پر کی کثافت سطح پر کی کثافت کا $3\frac{1}{2}$ گنا ہے۔

۱۱۶ - ہندسی اشکال کے اوسط مرکز۔

ہندسی نقاط

$(\text{لا}_1,\text{جا}_1),\ (\text{لا}_2,\text{جا}_2),\ (\text{لا}_3,\text{جا}_3)\ \ldots\ldots\ (\text{لا}_n,\text{جا}_n)$ .... (۱)

کے نظام کے اوسط مرکز (ط) کی یہ تعریف ہوسکتی ہے کہ یہ وہ نقطہ ہے جس کے محدد ہیں

$$\left.\begin{aligned} \bar{\text{لا}} &= \frac{1}{\text{ن}}\left(\text{لا}_1 + \text{لا}_2 + \cdots\cdots + \text{لا}_{\text{ن}}\right) = \frac{\sum(\text{لا})}{\text{ن}} \\ \bar{\text{ما}} &= \frac{1}{\text{ن}}\left(\text{ما}_1 + \text{ما}_2 + \cdots\cdots + \text{ما}_{\text{ن}}\right) = \frac{\sum(\text{ما})}{\text{ن}} \end{aligned}\right\} \quad (۲)$$

چونکہ یہ ارتباط خطی ہیں اور کارٹیزی محددوں کے استحالے خطی ضابطوں سے عمل میں لائے جاتے ہیں اس لئے یہ بآسانی معلوم ہوتا ہے کہ کسی خط سے ط کا فاصلہ اسی خط سے دئے ہوئے نقطوں کے فاصلوں کے اوسط حسابی کے مساوی ہے۔ البتہ ان فاصلوں کو مناسب علامتوں کے ساتھ لیا جائے بموجب اس کے کہ یہ خط کے ایک جانب واقع ہوں یا دوسری جانب۔

اسی طریقہ سے، ایک مستوی منحنی کا یا مستوی رقبہ کا ایک اوسط مرکز ہوتا ہے جس کا فاصلہ اس مستوی میں کے کسی خط سے منحنی یا رقبہ کے صغاری اجزاء کے فاصلوں کے اوسط (دفعہ ۱۱۵ کے معنے میں) کے مساوی ہوتا ہے۔

پس منحنی کے لئے

۲۶۴

$$\bar{\text{لا}} = \text{نہا}\,\frac{\sum \text{لا مف س}}{\sum \text{مف س}}،\quad \bar{\text{ما}} = \text{نہا}\,\frac{\sum \text{ما مف س}}{\sum \text{مف س}} \quad \cdots\cdots(۳)$$

اور رقبہ کی صورت میں

$$\bar{\text{لا}} = \text{نہا}\,\frac{\sum \text{لا مف ق}}{\sum \text{مف ق}}،\quad \bar{\text{ما}} = \text{نہا}\,\frac{\sum \text{ما مف ق}}{\sum \text{مف ق}} \quad \cdots\cdots(۴)$$

جہاں مف ق رقبہ کا جزو یا عنصر ہے۔ انتہا میں یہ مجموعے تکملوں کی شکل اختیار کر لیتے ہیں۔

مثال ۱۔ دائری قوس کی صورت میں، اگر مبدا کو مرکز، محور لا کو وسطی خط پر لیا جائے تو $\bar{\text{ما}} = 0$ ازروئے تشاکل۔ لکھو لا = ا جم طہ، مف س = ا مف طہ، اس طرح

$$\bar{\text{لا}} = \frac{1}{۲\text{ا عہ}}\int_{-\text{عہ}}^{\text{عہ}} \text{ا جم طہ ا مف طہ} = \frac{\text{جب عہ}}{\text{عہ}}\,\text{ا} \quad \cdots\cdots(۵)$$

اگر ۲ عہ وہ زاویہ ہو جو کل قوس کے سامنے مرکز پر بنتا ہے۔

جیسے $ع$ بڑھتا ہے لامتناہی چھوٹی قیمت سے π تک، $\bar{لا}$ گھٹتا ہے ا سے صفر تک۔

نصف دائرہ کے لئے $ع = \frac{\pi}{۲}$ اور $\bar{لا} = \frac{۲}{\pi}$ ا = ۰٫۶۳۷ ا

مثال ۲- مکافی $ما^{۲} = ۴ ا لا$ .... (۶)

کے قطعہ کے رقبہ کے لئے جو دوہرے معین $لا = ف$ سے گھرا ہوا ہو

$$\bar{لا} = \frac{\int_{ب}^{ف} لا\, ما\, فر\, لا}{\int_{ب}^{ف} ما\, فر\, لا} = \frac{\int_{ب}^{ف} لا^{\frac{۳}{۲}} فر\, لا}{\int_{ب}^{ف} لا^{\frac{۱}{۲}} فر\, لا} = \frac{۳}{۵} ف \quad ..... (۷)$$

اوسط مرکز کے تخیل کی صریحاً تین ابعادی شکلوں کی صورت میں بھی توسیع کی جا سکتی ہے، لیکن یہاں خط سے فاصلوں کی بجائے سطح مستوی سے فاصلے لئے جانے چاہئیں۔ مثلاً سطح منحنی کی صورت میں

$$\bar{لا} = نہا \frac{\Sigma\, لا\, مف\, س}{\Sigma\, مف\, س}، \quad \bar{ما} = نہا \frac{\Sigma\, ما\, مف\, س}{\Sigma\, مف\, س}، \quad \bar{ی} = نہا \frac{\Sigma\, ی\, مف\, س}{\Sigma\, مف\, س} \quad .... (۸)$$

جہاں مف س سطح کا جزو ہے۔ اسی طرح حجم کے لئے

$$\bar{لا} = نہا \frac{\Sigma\, لا\, مف\, ح}{\Sigma\, مف\, ح}، \quad \bar{ما} = نہا \frac{\Sigma\, ما\, مف\, ح}{\Sigma\, مف\, ح}، \quad \bar{ی} = نہا \frac{\Sigma\, ی\, مف\, ح}{\Sigma\, مف\, ح} \quad .... (۹)$$

جہاں مف ح حجم کا جزو ہے۔

گردشی سطح یا مجسم کی صورت میں اوسط مرکز تشاکل کے محور پر ہوتا ہے، اگر اس کو محور لا مانا جائے تو صرف $\bar{لا}$ کی قیمت محسوب کرنا باقی رہ جاتا ہے۔ اگر مکون منحنی کا معین ما ہو تو (۸) میں رکھو $مف\, س = ۲\pi\, ما\, مف\, س$ یہ سطح کے حلقہ نما
جزو کا رقبہ ہوگا جس کے سب نقطے مستوی لا = . سے مساوی فاصلہ پر ہیں۔ ۲۶۵
اس لئے

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\int \text{لا} \times 2\pi\, \text{ما فرس}}{\int 2\pi\, \text{ما فرس}} = \frac{\int \text{لا ما فرس}}{\int \text{ما فرس}} \quad \dots\dots\dots (10)$$

اسی طرح (۹) میں رکھو مف ح = π ما^2 مف لا تو حاصل ہوگا

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\int \text{لا} \times \pi\, \text{ما}^2\, \text{فرلا}}{\int \pi\, \text{ما}^2\, \text{فرلا}} = \frac{\int \text{لا ما}^2\, \text{فرلا}}{\int \text{ما}^2\, \text{فرلا}} \quad \dots\dots\dots (11)$$

مثال ۳ - کروی سطح کے منطقہ کے لئے رکھو

$$\text{لا} = \text{ا جم طہ}\text{، ما} = \text{ا جب طہ}\text{، مف س} = \text{ا مف طہ} \quad \dots\dots (12)$$

$$\text{تو } \bar{\text{لا}} = \text{ا} \frac{\int_{\text{عہ}}^{\text{بہ}} \text{جم طہ جب طہ فرطہ}}{\int_{\text{عہ}}^{\text{بہ}} \text{جب طہ فرطہ}} = \frac{1}{2}\,\text{ا}\, \frac{\text{جم}^2\,\text{عہ} - \text{جم}^2\,\text{بہ}}{\text{جم عہ} - \text{جم بہ}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{ا}\,(\text{جم عہ} + \text{جم بہ}) = \frac{1}{2}\,(\text{لا}_1 + \text{لا}_2) \quad \dots\dots\dots (13)$$

اگر عہ، بہ زاویہ طہ کے حدود ہوں اور لا$_1$، لا$_2$ حائط دائروں کے فصلے ہوں لہٰذا اس لئے منطقہ کا اوسط مرکز محور پر حائط دائروں کے مستویوں کے عین وسط میں واقع ہوتا ہے مثلاً نیم کروی سطح کا اوسط مرکز محوری نصف قطر کی تنصیف کرتا ہے۔

یہ نتائج کرہ اور لفافی اسطوانہ کے متناظر منطقوں کے رقبوں کے مساوی ہونے سے حاصل ہو سکتے تھے (دفعہ ۱۱۳ مثال ۱)۔

مثال ۴ - مجسم مستدیر مخروط کی صورت میں جبکہ مبدأ راس پر ہو تراش کا رقبہ ایسے بدلتا ہے جیسے لا^2، پس

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\int_0^{\text{ف}} \text{لا}^3\, \text{فرلا}}{\int_0^{\text{ف}} \text{لا}^2\, \text{فرلا}} = \frac{3}{4}\,\text{ف} \quad \dots\dots\dots (14)$$

اگر ف ارتفاع ہو۔

مثال ۵ - ناقص مکافی نما

$$\text{لا}^2 = \frac{\text{ما}^2}{\text{پ}} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ق}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۵)$$

کے قطعہ کے لئے جو لا = ف سے کٹتا ہے چونکہ تراش کا رقبہ ایسے بدلتا ہے جیسے لا،
اس لئے جیساکہ دفعہ ۱۰۸ ، مثال ۱ میں

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\int_0^{\text{ف}} \text{لا}^2 \, \text{فرلا}}{\int_0^{\text{ف}} \text{لا} \, \text{فرلا}} = \frac{۲}{۳}\text{ف} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۶)$$

مثال ۶ ۔ نصف قطر ا کے نصف کرہ کے لئے رکھو $\text{ما}^2 = \text{ا}^2 - \text{لا}^2$ اسطرح ۲۶۶

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\int_0^{\text{ا}} \text{لا}\,(\text{ا}^2 - \text{لا}^2)\, \text{فرلا}}{\int_0^{\text{ا}} (\text{ا}^2 - \text{لا}^2)\, \text{فرلا}} = \frac{۳}{۸}\text{ا} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۷)$$

اسی ضابطہ سے ناقص نما

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۸)$$

کے اس نصف کے اوسط مرکز کا مقام معلوم ہوتا ہے جو مستوی ما ی کے دائیں جانب
واقع ہے کیونکہ اس صورت میں ف (لا) ایسے بدلتا ہے جیسے $\text{ا}^2 - \text{لا}^2$۔ دیکھو
دفعہ ۱۰۸ ، مثال ۲ ۔

۱۱۷ ۔ پیپس (PAPPUS.) کے مسئلے ۔

(۱) اگر ایک مستوی منحنی کی قوس اپنی سطح میں کے ایک محور کے گرد گھومے مگر اسکو کاٹے نہیں تو سطح جو اس طرح پیدا ہوتی ہے وہ قوس کے طول اور اوسط مرکز کے راستہ کے طول کے حاصل ضرب کے مساوی ہے ۔

فرض کرو کہ محور لا گھماؤ کے محور پر منطبق ہوتا ہے اور کسی منحنی کا معین ما ہے ۔ دفعہ ۱۱۳ کی رو سے پوری گردش میں جو سطح پیدا ہوتی ہے وہ $۲\pi \int \text{ما}\,\text{فرس}$ کے مساوی ہے جہاں تکملہ کل قوس پر لیا جائے ۔

اگر قوس کا اوسط مرکز ما ہو تو $ما = \dfrac{\int ما\ فرس}{\int فرس}$ دفعہ ۱۱۶ کی رو سے۔

اس لئے $۲\pi \int ما\ فرس = ۲\pi\ ما \times \int فرس$ ......(۱)

جو مسئلہ مذکورہ ہے۔

(۲) اگر ایک مستوی رقبہ کو اپنی سطح میں کے ایک محور کے گرد پھرایا جائے جو اسے کاٹے نہیں تو حجم جو اس طرح پیدا ہوتا ہے وہ رقبہ اور اسکے اوسط مرکز کے راستہ کے طول کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

فرض کرو کہ مف ق رقبہ کا عنصر ہے۔ پوری گردش میں جو حجم پیدا ہوتا ہے وہ ہے

$$نہا\ \Sigma\ (۲\pi\ ما \times مف\ ق)$$

اگر رقبہ کی کمیت کا مرکز ما ہو تو

$$ما = نہا\ \dfrac{\Sigma\ ما\ مف\ ق}{\Sigma\ مف\ ق}$$ ، دفعہ ۱۱۶ کی رو سے

اسلئے $نہا\ \Sigma\ (۲\pi\ ما \times مف\ ق) = ۲\pi\ ما \times نہا\ \Sigma\ مف\ ق$ ....(۲) ۲۶۷

جو مسئلہ مطلوبہ ہے*۔

گردشوں کو پورا خیال کیا گیا ہے لیکن عموماً یہ قید ضروری نہیں۔

ان مسائل کے عکس مستوی قوس، مستوی رقبہ کے اوسط مرکز دریافت کرنیکے لئے استعمال ہو سکتے ہیں جبکہ ان کی گردش سے پیدا شدہ سطح اور حجم بلاواسطہ طریقہ سے معلوم ہوں۔ دیکھو مثال ۳ آگے۔

* یہ مسائل پپیس کے رسالہ علم حیل میں موجود ہیں۔ پپیس ۳۴۰ء میں مشہور ریاضی داں تھا۔ نئے سرے سے گلڈن (Guildinus) ان مائل کو بیان کیا۔ دیکھو

(De centro gravitatis)(1635—1642).

(Ball, History of Mathematics)

مثال ۱- دائرہ نصف قطر ب، اپنی سطح میں کے ایک خط کے گرد گھوم کر چھلا پیدا کرتا ہے- دائرہ کے مرکز کا فاصلہ خط سے ا ہے- سطح اور حجم دریافت کرو-

سطح ہے ۲π ب × ۲π ا = ۴π^2 ا ب

حجم ہے π ب^2 × ۲π ا = ۲π^2 ا ب^2- مقابلہ کرو دفعہ ۱۰۷ مثال ۳ اور دفعہ ۱۱۳ مثال ۲ کے ساتھ-

مثال ۲- مکافی ما^2 = ۴ ا لا کا قطعہ جو دوہرے معین لا = ف سے گھرا ہوا ہے اس معین کے گرد گھومتا ہے-

اگر دوہرے معین کا طول ۲ ک ہو تو قطعہ کا رقبہ $\frac{4}{3}$ ف ک ہے (دفعہ ۱۰۱) اور اس کے اوسط مرکز کا فاصلہ معین سے $\frac{2}{5}$ ف ہے (دفعہ ۱۱۲ مثال ۲) اس لئے حجم جو پوری گردش سے پیدا ہوتا ہے یہ ہے

$\frac{4}{3}$ ف ک × $\frac{4}{5}$ π ف = $\frac{16}{15}$ π ف^2 ک

مثال ۳- نیم دائری قوس جو اس کے سروں کے ملانیوالے قطر کے گرد گھومتی ہے اسکے لئے

π ا × ۲π ما = ۴π ا^2، جس سے ما = $\frac{2}{\pi}$ ا

نیم دائری رقبہ جو اپنے احاطہ کرنے والے قطر کے گرد گھومتا ہے اسکی صورت میں

$\frac{1}{2}$ π ا^2 × ۲π ما = $\frac{4}{3}$ π ا^3 یعنی ما = $\frac{4}{3}$ $\frac{ا}{\pi}$

اسی طرح کے حساب سے (کسی عمودی تراش کے) منشور یا اسطوانہ کے حجم کے لئے جو مستوی سروں سے گھرا ہوا ہو سادہ ضابطہ مل سکتا ہے-

پہلے ہم یہ فرض کرینگے کہ ایک سرا جسے قاعدہ کہا جائیگا طول پر عمود ہے-

فرض کرو کہ قاعدہ کا کوئی نقطہ پ ہے اور فرض کرو کہ معین پ پ' کا طول ی ہے جہاں پ پ' طول کے متوازی کھینچا گیا ہے اور یہ مقابل کے سرے سے پ' ۲۶۸
پر ملتا ہے- نیز فرض کرو کہ مائل سرے کے مرکز کا معین ی̄ ہے-

اگر پ اور پ' پر رقبہ کے متناظر اجزا مف ق اور مف ق' ہوں تو

$$ی = نہا \frac{\Sigma\ ی\ مف\ ق}{\Sigma\ مف\ ق} = نہا \frac{\Sigma\ ی\ مف\ ق}{\Sigma\ مف\ ق}$$

کیونکہ مف ق، مف ق کا قائم ظل ہے، اس لئے انکی باہمی نسبت مستقل ہے۔

اسلئے مجسم کا حجم = Σ (ی × مف ق) = ی Σ مف ق ...(۳)

یعنی حجم قاعدہ کے رقبہ اور مقابل کے رقبہ کے اوسط مرکز کے معین کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

جس منشور یا اسطوانہ کے دونوں سرے مائل ہوں اس کو دو ایسے منشوروں یا اسطوانوں کا مجموعہ یا فرق تصور کیا جاسکتا ہے جن میں سے ہر ایک کا ایک سرا طول کے علی القوائم ہو۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ تمام صورتوں میں حجم، چلیپی تراش اور دو سروں کے اوسط مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

مثال ۴۔ فانہ کی شکل کے مجسم کا حجم جو ایک قائم مستدیر اسطوانہ سے قاعدہ کے مرکز میں سے گذرنے والے مستوی سے کاٹا جائے اور قاعدہ کی سطح کے ساتھ زاویہ عہ بنائے یہ ہے

$\frac{1}{2}$ ط ا^2 × $\frac{4}{3ط}$ ا س عہ = $\frac{2}{3}$ ا^3 مس عہ مقابلہ کرو دفعہ ۱۱۸ مثال ا کے ساتھ

پیپس کے مسئلوں کی کئی طرح سے تعمیم ہوسکتی ہے لیکن دوسرے مسئلہ کی حسب ذیل توسیع کا یہاں کردینا کافی ہوگا۔

اگر کوئی مستوی رقبہ، جو مستقل ہو یا مسلسل طور پر بدلنے والا، فضا میں کسی طور پر حرکت کرے لیکن اس طرح کہ مستوی کے متصل محل ایک دوسرے کو رقبہ کے اندر نہ قطع کریں تو حجم تکوین شدہ مساوی ہے

$$\int س\ فرشہ \ ....\ (۴)$$

کہ جہاں س رقبہ ہے اور فرشہ ظل ہے مستوی پر کے عماد پر، رقبہ کے اوسط مرکز کے طریق (لوکس) کے چھوٹے جزو کا۔ اگر اس طریق کا جزو فرس ہو اور فرس

اور مستوی کے عماد کے درمیان زاویہ $ط_۱$ ہو تو یہ ضابطہ یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\int س \; جم \; ط_۱ \; فرس \quad ....(۵)$$

یہ مسئلہ تین ابعادی جواب ہے مسئلہ دفعہ ۱۰۳ کا جو اس امر سے متعلق ہے کہ ایک متحرک خط اپنی حرکت میں کتنا رقبہ عبور کرتا ہے ۔ مسئلہ زیر بحث اوپر کے ثابت شدہ مسئلہ کا نتیجہ صریح ہے ۔

۳۶۹ ۱۱۸ - **ضعفی تکملے** - اس کتاب کی بحث زیادہ تر ایک متغیر کے تفاعلوں تک محدود ہے اور اس لئے جہاں تک تکملی احصا کا تعلق ہے یہ ایسے مسائل پر بحث کرتی ہے جو ایک تکمل پر منحصر ہیں یا ایک تکمل پر لا کے منحصر کئے جا سکتے ہیں۔ لیکن ضعفی تکملے مضمون کے طبیعی استعمال میں ترقیم وغیرہ کے طور پر اس کثرت سے استعمال ہوتے ہیں کہ ان کے متعلق چند تشریحات کا یہاں دیدینا سود مند ہوگا۔ نظری امور پر صرف سرسری توجہ کی جائے گی۔ باضابطہ بحث کے لئے دفعہ ۹۰ کے طریقہ کی مناسب ترمیم کیجا سکتی ہے ۔

فرض کرو کہ ی، متبوع متغیروں لا، ما کا مسلسل اور وحید القیمت تفاعل ہے

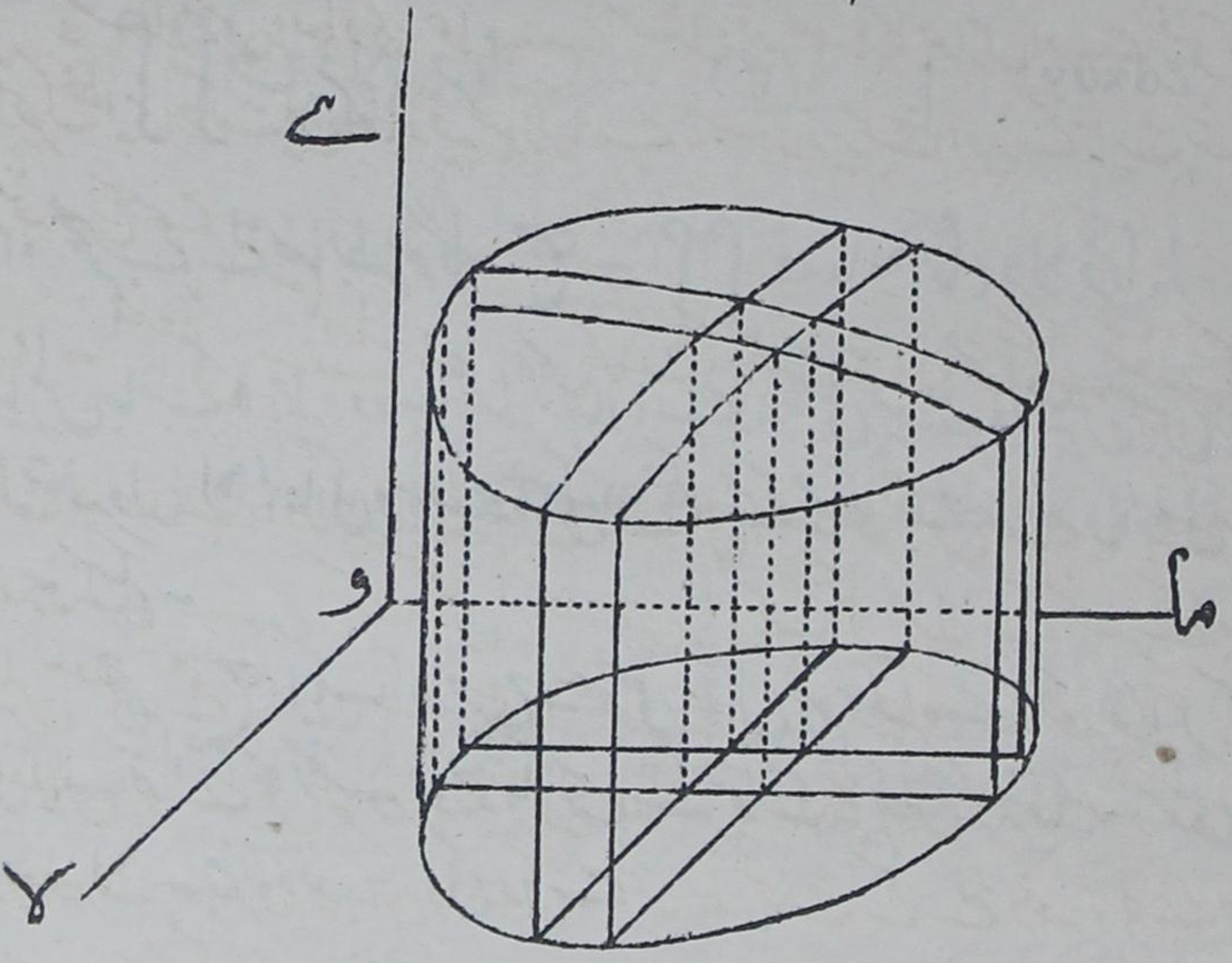
$$ی = فا (لا، ما) \quad ....(۱)$$

اسکی ہندسی تعبیر یہ ہو سکتی ہے کہ یہ ایک سطح کی مساوات ہے (دفعہ ۳۴)۔ حوالہ کے مستوی لا ما میں کوئی محدود طبقہ س لو اور فرض کرو کہ ایک اسطوانی سطح ایک خط مستقیم کے ذریعہ پیدا کیجاتی ہے جو ہمیشہ س کے محیط سے ملتا ہے اور ی کے محور کے متوازی رہتا ہے ۔ اس حجم ح پر غور کرو جو اس اسطوانہ، مستوی لا ما اور سطح (۱) کے درمیان گھرا ہے۔ دیکھو شکل ۶۸ صفحہ ۳۶۹ -

اگر طبقہ س کو رقبہ کے اجزا $مف ق_۱$، $مف ق_۲$، $مف ق_۳$ ..... میں تقسیم کیا جائے اور ان اجزا کے اندر کے کسی اختیاری نقطوں سے کھینچے ہوئے سطح (۱) کے معین $ی_۱$، $ی_۲$، ..... $ی_ک$ ہوں تو محوروں کو علی القوائم فرض کر کے مجموعہ

$$ی_۱ \, مف ق_۱ + ی_۲ \, مف ق_۲ + ی_۳ \, مف ق_۳ + ... (۲)$$

سے منشوروں کے ایک نظام کا کل حجم ملیگا جن کے ارتفاع ی_1، ی_2، ی_3...... ۲۷۰
ہیں اور جو قاعدوں مف ق_1، مف ق_2، مف ق_3... پر قائم ہیں۔



شکل (۶۸)

اور اگر تفاعل فہ (لا، ما) بعض شرائط کو پورا کرے جو عام طور پر تفاعل پورا کرتے ہیں* تو اوپر کا مجموعہ، جبکہ مف ق_1، مف ق_2، ...... کے ابعاد کو لا انتہا کم کیا جائے ایک یگانہ انتہائی قیمت کی طرف مستدق ہوگا۔ یہ انتہا حجم ح ہے۔
اگر طبقہ س کے چھوٹے حصے محاور لا اور ما کے متوازی ہوں تو اجزا مف ق_1، مف ق_2، مف ق_3...... نمونہ مف لا مف ما
کے مستطیلی رقبے ہونگے اور مجموعہ (۲)

$\iint$ ی مف لا مف ما ....(۳)

---

* تسلسل کی شرط جس کا پہلے سے ذکر کیا گیا ہے وہ کافی ہے لیکن ثبوت میں سہولت پیدا ہوگی اگر یہ زائد شرط شریک کر دیجائے کہ مستوی لا ما کے کسی محدود رقبہ کے اندر فہ (لا، ما) کی اعظم اور اقل قیمتیں تعداد میں محدود ہیں۔ دیکھو دفعہ ۹۰۔

سے تعبیر ہو سکیگا جہاں ح دوبارہ آتا ہے کیونکہ مجموعہ دو ابعاد میں لیا جاتا ہے۔
اس مجموعہ کی انتہائی قیمت ذیل کی علامت سے تعبیر ہوگی۔

∫∫ ی فرلا فرما ...... (۴)   [∫∫ Zdxdy]

اور حجم کے لئے ضابطہ ہوگا ح = ∫∫ فہ (لا، ما) فرلا فرما ....(۵)

بائیں جانب کا جملہ ''دوہرا تکملہ'' کہلاتا ہے۔ اسکی قیمت کی تعیین نہیں ہوسکتی جب تک کہ متغیرول لا، ما کی وسعت جسکی س کے محیط سے حد بندی ہوتی ہے معین نہ ہوسکے۔

حجم ح ایک اور طرح سے بھی حاصل ہوسکتا ہے۔ اگر ف (لا) سطح کی ایک تراش کا رقبہ ہو جو ما ی کے متوازی ایک مستوی سے کٹتی ہے جس کا فصلہ لا ہے تو دفعہ ۱۰۶ کی رو سے

ح = ∫ (ا سے ب تک) ف (لا) فرلا ....(۶)

جہاں رقبہ س سے متعلق لا کے حدود ا، ب ہیں۔ لیکن دفعہ ۱۰۰ کی رو سے

ف (لا) = ∫ (عہ سے بہ تک) ی فرما ....(۷)

جہاں عہ، بہ تراش ف (لا) میں ما کے حدود ہیں جو بالعموم لا کے تفاعل ہونگے۔ اس لئے

ح = ∫ (ا سے ب تک) { ∫ (عہ سے بہ تک) فہ (لا، ما) فرما } فرلا ....(۸)

یا جیسے اسکو بالعموم لکھا جاتا ہے

ح = ∫ (ا سے ب تک) ∫ (عہ سے بہ تک) فہ (لا، ما) فرلا فرما ...(۹)+   [∫∫ ф (x,y) dxdy]

+ پہلا تکملہ فرلا سے متعلق ہے اور دوسرا فرما سے۔ اس امر کے متعلق کوئی پورے طور پر یکساں قرارداد نہیں ہے۔

اگر دونوں تکملوں کے حدود مستقل ہوں یعنی اگر طبقہ س ایک مستطیل کی شکل کا ہو جس کے اضلاع محاور لا اور ما کے متوازی ہیں تو حجم اس طور پر بھی بیان ہو سکیگا

$$\int_{\text{ع}}^{\text{ب}} \left\{ \int_{\text{د}}^{\text{ج}} \text{فہ} (\text{لا}، \text{ما})\ \text{فرلا} \right\} \text{فرما} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

اور یہ کہا جا سکتا ہے کہ

$$\int_{\text{د}}^{\text{ج}} \int_{\text{ع}}^{\text{ب}} \text{فہ} (\text{لا}، \text{ما})\ \text{فرلا فرما} = \int_{\text{ع}}^{\text{ب}} \int_{\text{د}}^{\text{ج}} \text{فہ} (\text{لا}، \text{ما})\ \text{فرما فرلا} \quad \ldots (۱۱)$$

اس کی توضیح شکل ۲۳ دفعہ ۴۳ سے ہوتی ہے۔ اور صورتوں میں جب تکمل کی ترتیب کو بدلا جائے تو مختلف تکملوں کے حدود کی ترمیم ضروری ہوتی ہے۔

اوپر کی تشریح ہندسی شکل میں ہے لیکن نفس مضمون کے لئے یہ ضروری نہیں۔ مثلاً ایک مستوی پترے کی کمیت نکالنے ہیں جس کے کسی ایک نقطہ (لا، ما) پر کثافت معلوم ہو، نیز کئی اور طبیعی سوالات میں یہی اصول شامل ہوتے ہیں۔

رقبہ س کی تحلیل کے لئے ایک اور طریقہ سودمند ہوتا ہے۔ مستوی لا ما میں قطبی محدود (ر، طہ) لو۔ رقبہ س کو مستطیل نما اجزا میں ہم مرکز دائروں اور نیم قطروں کے ذریعہ تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ ایسے کسی ایک جزو کا رقبہ ر مف طہ مف ر ہے اگر ر دو منتخبی اضلاع کے نیم قطروں کا اوسط حسابی ہو۔ ضابطہ (۸) اس طرح یہ شکل اختیار کرتا ہے

$$\text{ح} = \iint \text{ی ر فر طہ فر ر} \quad \ldots (۱۲) \qquad \left[\iint Zr\,d\theta dr \right]$$

جہاں ی ایک دیا ہوا تفاعل ہے ر اور طہ کا۔

جو اوپر بیان ہوا اس کے بعد تہرے تکملہ

$$\iiint \text{فہ} (\text{لا}، \text{ما}، \text{ی})\ \text{فرلا فرما فری} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۳)$$

کے مفہوم کو زیادہ سمجھنے کرنے کی ضرورت نہیں۔ ایک محدود حلا کے حصہ ر کو تھوڑوں

متوازی مُستوی کھینچنے سے قائم عناصر مف لا مف ما مف ی میں تقسیم کرو۔ اگر ان عنصروں میں سے ہر ایک کے حجم کو ان میں کے کسی اختیاری طور پر منتخب کئے ہوئے نقطہ پر جو تفاعل فہ (لا، ما، ی) کی قیمت ہے اس کے ساتھ ضرب دیا جائے تو جملہ (۱۳) سے ایسے حاصل ضربوں کے مجموعہ کی انتہائی قیمت (بعض شرائط کے تابع) تعبیر ہوگی جبکہ اِن عنصروں کے ابعاد کو لاانتہا کم کیا جائے یہی انتہائی قیمت تین سادہ تکملوں کے تواتر سے حاصل ہو سکتی ہے۔ مثلاً

$$\int_{\text{ل}}^{\text{م}}\left\{\int_{\text{عہ}}^{\text{بہ}}\left(\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ (لا، ما، ی) فری}\right)\text{فرما}\right\}\text{فرلا} \quad \ldots\ldots (۱۴)$$

جہاں تکمل بلحاظ ی کے حدود ا اور ب کے اندر ہے جو عام طور پر لا، ما کے تفاعل ہیں پھر تکمل بلحاظ ما کے حدود عہ، بہ کے درمیان ہے جو بالعموم لا کے تفاعل ہیں اور اخیر میں تکمل بلحاظ لا کے ہے حدود ل، م کے اندر۔ ۲۷۲
اگر تکمل کے حدود سب مستقل ہوں تو تکمل کی ترتیب کے بدلنے سے یہ حدود نہیں بدلتے۔

مثال کے طور پر ایک مجسم کی کمیت معلوم کرنے کے سوال پر غور کرو جہاں کثافت لا، ما، ی کا تفاعل ہے۔

مثال ۱۔ اُس خانہ کا حجم دریافت کرو جو گھرا ہوا ہے مُستوی ی = ۰، اسطوانہ

$$\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = \text{ا}^{۲} \quad \ldots\ldots (۱۵)$$

اور مستوی ی = لا مس عہ کے اس حصہ کے درمیان جس کے لئے ی مثبت ہے۔

$$\iiint \text{ی فرلا فرما} = \text{مس عہ} \int_{\text{۰}}^{\text{ا}}\int_{-\sqrt{\text{ا}^{۲}-\text{لا}^{۲}}}^{\sqrt{\text{ا}^{۲}-\text{لا}^{۲}}} \text{لا فرلا فرما} \quad \ldots\ldots (۱۶)$$

بلحاظ ما کے تکمل سے حاصل ہوتا ہے

$$\left[\text{لا ما}\right]_{-\sqrt{\text{ا}^{۲}-\text{لا}^{۲}}}^{\sqrt{\text{ا}^{۲}-\text{لا}^{۲}}} = \text{۲ لا}\sqrt{\text{ا}^{۲}-\text{لا}^{۲}}$$

تب $\int_{\text{ب}}^{\text{ا}} ۲\,\text{لا}\sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲}}\ \text{فرلا} = \left[-\frac{۲}{۳}(\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}\right]_{\text{ب}}^{\text{ا}} = \frac{۲}{۳}\text{ا}^{۳}$

مطلوبہ حجم اس لئے یہ ہے $\frac{۲}{۳}\text{ا}^{۳}$ س عـہ .... (۱۷)

مثال ۲ - حجم جو کرہ $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲} = \text{ا}^{۲}$ .... (۱۸)

اور اسطوانہ $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = \text{ا لا}$ .... (۱۹)

کے درمیان گھرا ہوا ہے اسے دریافت کرو۔

(اسطوانہ کا نیم قطر کرہ کے نیم قطر سے آدھا ہے اور اس کا محور کرہ کے ایک نصف قطر کی علی القوایم تنصیف کرتا ہے)۔

اگر مستوی لا ما میں قطبی محدد شامل کئے جائیں تو مساوات (۱۹) یہ شکل اختیار کرتی ہے $\text{ر} = \text{ا جم طہ}$ .... (۲۰)

اور (۱۸) سے حاصل ہوتا ہے $\text{ی} = \pm\sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{ر}^{۲}}$ .... (۲۱)

مطلوبہ حجم اس لئے ہے

$$۲\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{\text{ب}}^{\text{ا جم طہ}} \text{ی ر فر طہ فر ر} = ۴\int_{\text{ب}}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{\text{ب}}^{\text{ا جم طہ}} \sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{ر}^{۲}}\ \text{ر فر طہ فر ر}$$ .... (۲۲)

اب $\int_{\text{ب}}^{\text{ا جم طہ}} \sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{ر}^{۲}}\ \text{ر فر ر} = \left[-\frac{۱}{۳}(\text{ا}^{۲} - \text{ر}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}\right]_{\text{ب}}^{\text{ا جم طہ}}$

$= \frac{\text{ا}^{۳}}{۳}(۱ - \text{جب}^{۳}\text{طہ})$ ۔

اور $\int_{\text{ب}}^{\frac{\pi}{۲}} (۱ - \text{جب}^{۳}\text{طہ})\ \text{فر طہ} = \frac{\pi}{۲} - \frac{۲}{۳}$

بالآخر نتیجہ ہے $\frac{۲}{۳}\pi\text{ا}^{۳} - \frac{۸}{۹}\text{ا}^{۳}$ .... (۲۳)

امثلہ ۳۶*

۱- اگر ایک منحنی ایسا ہو کہ $ما^{م} \propto لا^{ن}$ تو ثابت کرو کہ جو مستطیل محوروں سے اور منحنی کے کسی نقطہ میں سے محدودوں کے متوازی خط کھینچنے سے بنتا ہے منحنی اسکو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے جنکے رقبے نسبت م : ن میں ہوتے ہیں۔

۲- محور لا اور منحنی $ما = ب \text{ جب } \frac{لا}{ا}$ کی نیم موج کی درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے وہ ۲ ا ب ہے۔

۳- زنجیرہ $ما = ج \text{ جمز } \frac{لا}{ج}$، محور لا، اور خطوط $لا = ۰$، $لا = لا_{۱}$ کے درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے وہ $ج^{۲} \text{ جنز } \frac{لا_{۱}}{ج}$ ہے۔

۴- منحنی $ا^{۲} ما = لا^{۲} (لا + ا)$، محور لا کی ساتھ ملکے $\frac{ا^{۲}}{۱۲}$ رقبہ گھیرتا ہے۔

۵- محور لا اور منحنی $ما = ق^{-ع لا} \text{ جب } ب لا$ کے متواتر نیم موجوں کے درمیان جو رقبے ہیں ثابت کرو کہ وہ تنزلی ہندسی سلسلہ بناتے ہیں جن کی نسبت مشترک $ق^{-\frac{ع \pi}{ب}}$ ہے۔

۶- محور لا اور مکافی $ج ما = (لا - ا)(لا - ب)$ کے درمیان رقبہ $\frac{۱}{۶} \frac{(ا - ب)^{۳}}{ج}$ ہے۔

۷- منحنیوں $۲ ما^{۲} - ۳ ما = لا - ۱$، $ما^{۲} - ۲ ما = لا - ۳$ کے درمیان کا رقبہ دریافت کرو۔ $\left[\frac{۹}{۴}\right]$

۸- مکافیوں $ما = ۳ لا^{۲} - لا - ۳$، $ما = -۲ لا^{۲} + ۴ لا + ۷$ کے درمیان کا رقبہ دریافت کرو۔ $\left[\frac{۴۵}{۲}\right]$

---

* مشق کے لئے اور مثالیں "خاص منحنیات" کے نویں باب کے ختم پر ملینگی۔

۹- مکافی $ما = لا^۲ - ۷لا + ۹$ کا قطعہ جو خط مستقیم $ما = ۳ - ۲لا$ سے کٹتا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔ $[\frac{۱}{۶}]$

۱۰- مکافیوں $ما^۲ = ۴ا(لا + ا)$، $ما^۲ = ۴ب(ب - لا)$ کے درمیان کا رقبہ $\frac{۸}{۳}(ا + ب)\sqrt{اب}$ ہے۔

۱۱- ثابت کرو کہ کل رقبہ (جبکہ یہ محدود ہو) جو محور لا اور منحنی $ما = \frac{۱}{عا} فا(\frac{لا}{عا})$ کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ عا کی قیمت پر منحصر نہیں۔ ۲۷۴

۱۲- منحنی $ما = ب$ مسر $\frac{لا}{ا}$ کی مثبت شاخ، اسکے متقارب اور محور ما کے درمیان کا رقبہ $اب$ لوگ ۲ ہے۔ [دیکھو شکل ۲۶ صفحہ ۱۱۵]

۱۳- دو ناقصوں $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$، $\frac{لا^۲}{ب^۲} + \frac{ما^۲}{ا^۲} = ۱$ کا مشترک رقبہ $۴اب$ ظس$^{-۱}\frac{ب}{ا}$ ہے۔

۱۴- رقبہ جو محدودوں کے محوروں اور مکافی $(\frac{لا}{ا})^{\frac{۱}{۲}} + (\frac{ما}{ب})^{\frac{۱}{۲}} = ۱$ کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ $\frac{۱}{۶}اب$ جب سہ ہے جہاں محوروں کے درمیان کا زاویہ سہ ہے [رکھو $لا = ا$ جب^۴ طہ، $ما = ب$ جم^۴ طہ]

۱۵- مکافی $۲ج ما = لا^۲ + ا^۲$ اور اس کے دو مماسوں کے درمیان جو مبدأ سے کھینچے جائیں رقبہ $\frac{۱}{۳}\frac{ا^۳}{ج}$ ہے۔

۱۶- مکافیوں $ما^۲ = ۴ا لا$، $لا^۲ = ۴ا ما$ کا مشترک رقبہ $\frac{۱۶}{۳}ا^۲$ ہے۔

۱۷- تکمل سے ثابت کرو کہ ناقص کا رقبہ ہے π عا$_۱$ با$_۱$ جب سہ جہاں عا$_۱$، با$_۱$ مزدوج نیم قطروں کے کسی جوڑے کے طول ہیں اور سہ ان کے درمیان زاویہ ہے۔

۱۸- تکمل بالحصص کا ضابطہ [دفعہ ۸۰ (۲)] اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$$\int ع\, فر و = ع و - \int و\, فر ع$$

ہندسی طور پر رقبوں کی رقوم میں اسکی تعبیر بیان کرو۔

۱۹۔ باریک پتر ے پر ایک منحنی ا ب بنایا گیا ہے اور پترا اپنی سطح میں ثابت نقطہ و کے گرد زاویہ طہ میں سے گھومتا ہے۔ ثابت کرو کہ منحنی جو رقبہ عبور کرتا ہے وہ ہے

$$\frac{1}{2}(و ا^2 - و ب^2) طہ$$

۲۰۔ منحنی ر = ۳ + ۲ جم طہ کو مرتسم کرو اور اس کا رقبہ دریافت کرو۔ (۱۱ π)

۲۱۔ منحنی ر = ۲ ا (۱ + جم طہ) کے اس حصہ کا رقبہ دریافت کرو جو مکافی $ر = \frac{۲ ا}{۱ + جم طہ}$ کے باہر واقع ہوتا ہے۔ $[۳ \pi ا^2 + \frac{۱۶}{۳} ا^2]$

۲۲۔ قطبی محددوں میں تحویل کرنے سے ثابت کرو کہ ناقص

$ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۱$ کا رقبہ $\frac{\pi}{\sqrt{ا ب - ھ^2}}$ ہے۔

۲۳۔ ایک بے وزن رسی کا طول ل ہے، یہ ایک ثابت نقطہ و سے بندھی ہے اور ایک چھوٹے چھلے میں سے گذرتی ہے جو (چھلہ) ایک افقی سلاخ ا ب پر پھسل سکتا ہے، سلاخ، و میں کی انتصابی سطح میں واقع ہے۔ رسی کا نچلا حصہ انتصاباً نیچے لٹکتا ہے اور اس سرے کے ساتھ ایک چھوٹا وزن پ بندھا ہے۔ پ کا طریق دریافت کرو اور ثابت کرو کہ اس طریق اور ا ب کے درمیان رقبہ $ل \sqrt{ل^2 - گ^2} - گ^2 جم^{-1} \frac{ل}{گ}$ ہے جہاں گ گہرائی ہے ا ب کی نقطہ و سے۔

۲۴۔ ہندسی تخیلات کی بنا پر ثابت کرو کہ مکافی کے دو ماسکی نیم قطروں اور منحنی کے درمیان رقبہ اُس رقبہ کا نصف ہے جو منحنی مرتب پر کے متناظر عمودوں اور مرتب کے درمیان گھرا ہوا ہے۔

۲۵۔ (شکل ۵۹) بتاؤ کہ امسلر کے سطح پیما میں پہیہ کے درجوں سے کیا ظاہر

ہوگا جبکہ سلاخ پ ق ایک پورا چکر لگاتی ہے اور نقطہ ق ایک بند منحنی مرتسم کرتا ہے۔

۲۶۔ ایک سطح پیما ایسی شکل کا ہے کہ اس کے جس بازو کے ساتھ مرتسم نقطہ لگا ہوا ہے اس کا دوسرا سرا ایک انتصابی محور پر چول کی صورت میں لگا ہوا ہے۔ انتصابی محور کو ایک چھوٹی گاڑی اٹھائے پھرتی ہے جو کاغذ پر (بغیر پھسلنے کے) آگے پیچھے لڑھک سکتی ہے اور اسکے ساتھ ایک درجہ دار پہیہ لگا ہوا ہے جو کل لڑھکنے کی مقدار کو ظاہر کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ جب مرتسم نقطہ ایک بند منحنی مرتسم کرتا ہے تو پہیہ کے نشانات سے کسی خاص پیمانہ پر رقبہ حاصل ہوتا ہے۔

۲۷۔ ایک سلاخ پر تین نقطے ا، ب، ج ہیں، یہ سلاخ اپنے مستوی میں حرکت کرتی ہے اور یہ نقطے بند منحنی مرتسم کرتے ہیں جن کے رقبے س ا، س ب، س ج ہیں، سلاخ بغیر پورا چکر لگانے کے اپنے اصلی مقام پر پھر آجاتی ہے، ثابت کرو کہ

ب ج × س ا + ج ا × س ب + ا ب × س ج = ۰

جہاں خطوط ب ج، ج ا، ا ب کی علامات انکی سمتوں کے مطابق ہیں اور س ا، س ب، س ج کی علامتیں دفعہ ۱۰۱ کے قاعدہ سے متعین ہوتی ہیں۔

۲۸۔ سلاخ ا ب پر ایک نقطہ پ ہے، یہ سلاخ ایک ہی مستوی میں حرکت کرتی ہے اور ایک گردش پوری کرنے کے بعد اپنے اصلی مقام پر واپس آجاتی ہے۔

ثابت کرو کہ س پ = (ا س ب + ب س ا) / (ا + ب) − π ا ب

جہاں ا = ا پ، ب = پ ب اور س ا، س ب، س پ ۲۷۲
کا مفہوم وہی ہے جو اوپر کے سوال میں۔

اس لیے ثابت کرو کہ اگر سلاخ کے سرے ا، ب ایک بند بیضوی منحنی پر حرکت کریں تو س ا − س پ = π ا ب [ہولڈچ]

۲۹ — مستقل طول کا ایک خط مستقیم اب اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اسکے سرے دو ثابت متقاطع خطوط مستقیم پر ہمیشہ واقع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس پر کا کوئی نقطہ پ ایک ناقص مرتسم کرتا ہے جس کا رقبہ π × اپ × پ ب ہے۔

امثلہ* ۳۷

حجم

۱ — منحنی ما = ب جب (لا/ا) کی نیم موج کو محور لا کے گرد پھرانے سے جو حجم پیدا ہوتا ہے ثابت کرو کہ وہ حائط اسطوانہ کا نصف ہے۔

۲ — ثابت کرو کہ ایک مخروط ناقص کا حجم جس کے سرے متوازی ہیں

(۱/۳) ف {ق۱ + √(ق۱ ق۲) + ق۲} ہے جہاں ق۱، ق۲ اسکے سروں کے رقبے ہیں اور ف ان کے درمیان عمودی فاصلہ ہے۔

۳ — محور لا کے گرد قائم زائد لا² − ما² = ا² کی گردش سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کے ایک قطعہ کا حجم جسکی اونچائی ا ہو جسے رأس سے ناپا جائے ایک کرہ کے حجم کے مساوی ہوگا جس کا نیم قطر ا ہو۔

۴ — ایک قطعہ کرہ دو متوازی مستویوں سے گھرا ہوا ہے جن کا درمیانی عمودی فاصلہ ف ہے۔
ثابت کرو کہ اس کا حجم، اس اسطوانہ کے حجم سے جس کا ارتفاع ف ہے اور جسکی عمودی تراش کا رقبہ مستوی سروں کے رقبوں کا اوسط حسابی ہے بقدر اس کرہ کے حجم کے زیادہ ہے جس کا قطر ف ہے۔

۵ — ایک نیم کرہ کا نیم قطر ا ہے، اس کے قاعدہ سے فاصلہ ۲ ا جب ۱۰° پر، قاعدہ کے متوازی ایک مستوی کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ نیم کرہ کے حجم کی

---

* دیکھو صفحہ (۴ ۱۲۷) کے نیچے کا نوٹ۔

تنصیف کرتا ہے۔

۶۔ نیم قطر ا کے ایک ٹھوس کرہ کا جو حصہ، نیم قطر ب (ب < ۲ا) کی کروی سطح کے اندر شامل ہے جس کا مرکز ٹھوس کرہ کی سطح پر واقع ہے اس حصہ کو نکال دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے خلا کا حجم نیم قطر ب کے نیم کرہ کے حجم سے بقدر

$\frac{\pi\,\text{ب}^4}{4\,\text{ا}}$ کے کم ہے۔

۷۔ جو قطعہ مکافی $\text{ج}\,\text{ما} = (\text{لا}-\text{ا})(\text{لا}-\text{ب})$ اور محور لا کے درمیان گھرا ہوا ہے اس کو محور لا کے گرد گھمانے سے جو حجم پیدا ہوتا ہے وہ ہے۔

$$\frac{1}{30}\pi(\text{ا}-\text{ب})^5/\text{ج}^2$$

۲۷۷ ۸۔ اگر ایک قطعہ مکافی معین کے گرد گھومے تو حجم پیدا شدہ حائط اسطوانہ کے $\frac{8}{15}$ کے مساوی ہوگا۔

۹۔ ایسے مجسم کا حجم جو مکافی کو اُس پر کے مماس کے گرد پھرانے سے پیدا ہوتا ہے حائط اسطوانہ کا $\frac{1}{5}$ ہے۔

۱۰۔ مکافی $\text{ما}^2 = 4\,\text{ا}\,\text{لا}$ کا وہ حصہ جو وتر خاص سے کٹتا ہے، مرتب کے گرد گردش کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ پیدا شدہ حلقہ نما مجسم کا حجم $\frac{152}{15}\pi\,\text{ا}^3$ ہے۔

۱۱۔ وتر $\text{لا} = \text{ف}$ منحنی $\text{ا}\,\text{ما}^2 = \text{لا}^3$ سے جو حصہ کاٹتا ہے اسے محور لا کے گرد پھرایا گیا ہے، ثابت کرو کہ حجم پیدا شدہ اُس اسطوانہ کے حجم کا ایک چوتھائی ہے جس کا ارتفاع ف ہے اور جو اسی قاعدہ پر قائم ہے۔

۱۲۔ مثلثی منشور کے ایسے مقطوعہ کا حجم جس کو کوئی دو مستوی قطع کریں

$\frac{1}{3}(\text{ف}_1+\text{ف}_2+\text{ف}_3)\,\text{ق}$ ہے جہاں ف_1، ف_2، ف_3 تین متوازی کناروں کے طول ہیں اور ان کناروں پر عمود وار تراش کا رقبہ ق ہے۔

۱۳۔ ایک پیپے کی وسطی تراش کا نیم قطر ب ہے اور ہر سرے کا نیم قطر ا ہے۔ ثابت کرو کہ پیپے کا حجم ہے $\frac{\pi}{15}(3\,\text{ا}^2+4\,\text{ا}\,\text{ب}+8\,\text{ب}^2)\,\text{ف}$

جہاں ف پہیے کا طول ہے ۔ یہ مان لیا گیا ہے کہ پہیے کا مکون منحنی مکانی کی ایک قوس ہے ۔

۱۴ ۔ دائرہ کی ایک قوس اپنے وتر کے گرد گردش کرتی ہے ۔ ثابت کرو کہ مجسم کا حجم ہے

$$\frac{۴}{۳}\ \pi\ ا^{۳}\ جب^{۳}\ عہ + \frac{۲}{۳}\ \pi\ ا^{۳}\ جب\ عہ\ جم^{۲}\ عہ - ۲\ \pi\ ا^{۳}\ عہ\ جم\ عہ$$

جہاں ا نیم قطر ہے اور ۲ عہ قوس کی زاوی پیمائش ہے ۔

۱۵ ۔ وہ شکل جو نیم قطر ا کے دائرہ کے ربع اور اس کے سروں تک کے مماسوں سے گھری ہوئی ہے ان مماسوں میں سے ایک کے گرد گردش کرتی ہے ۔ ثابت کرو کہ اس طرح جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کا حجم ہے

$$\left(\frac{۵}{۳} - \frac{\pi}{۲}\right)\pi\ ا^{۳}$$

۱۶ ۔ دو مساوی نیم قطر ا کے قائم مستدیر اسطوانے ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ ان دونوں سے گھرا ہوا حجم $\frac{۱۶}{۳}\ ا^{۳}$ ہے ۔
اگر ان کے محور زاویہ عہ پر قطع کریں تو حجم $\frac{۱۶}{۳}\ ا^{۳}$ قم عہ ہے ۔

۱۷ ۔ اگر قطع زائد $\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} - \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}} = ۱$ محور لا کے گرد گھومے تو وہ حجم جو اس سطح، متقاربوں سے تکوین شدہ مخروط اور محور لا کے علی القوائم دو مستویوں کے درمیان گھر جاتا ہے جہاں مستویوں کا فصل ف ہے اس مستدیر اسطوانہ کے حجم کے مساوی ہے جس کا ارتفاع ف ہے اور نیم قطر ب ۔

۱۸ ۔ ایک قائم مستدیر مخروط کا نصف زاویہ عہ ہے، اس کا راس نیم قطر ا کے ایک کرہ کی سطح پر ہے اور اس کا محور مرکز میں سے گذرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ کرہ ۲۷۸
کے اس حصہ کا حجم جو مخروط سے باہر ہے $\frac{۴}{۳}\ \pi\ ا^{۳}\ جم^{۴}\ عہ$ ہے ۔

۱۹ ۔ اگر دفعہ ۱۰۹ کے سمپسن کے طریقہ میں جہاں دو متوازی تراشوں س، س۲ کے درمیان جو حجم شامل ہے وہ معلوم کیا گیا ہے، درمیان کی تراش س۲ تراشوں س، س۲ سے بالترتیب فاصلوں ھ، ک پر ہو تو ضابطہ ہوگا

$$\frac{\text{ھ}+\text{ک}}{\text{۶ ھ ک}}\left\{(\text{۲ھ}-\text{ک})\,\text{ک}\,\text{س}_{\text{۱}}+(\text{ھ}+\text{ک})^{\text{۲}}\,\text{س}_{\text{۲}}+(\text{۲ک}-\text{ھ})\,\text{ھ}\,\text{س}_{\text{۳}}\right\}$$

امثلہ ۲۸*

منحنی خط اور سطحیں

۱۔ جیب کے منحنی $\text{ما}=\text{ب جب}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ کی پوری موج (Undulation) کا طول ایک ناقص کے محیط کے مساوی ہے جسکے نیم محور $\sqrt{\text{ا}^{\text{۲}}+\text{ب}^{\text{۲}}}$ اور ا ہیں۔

۲۔ کسی منحنی میں مبدأ سے اسکے کسی مماس پر جو عمود (ع) کھینچ سکتا ہے اسکے طول کے لئے یہ ضابطہ حاصل کرو۔

$$\text{ع}=\text{لا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر س}}-\text{ما}\,\frac{\text{فر لا}}{\text{فر س}}$$

نیز ثابت کرو کہ سمتی نیم قطر کا مماس پر قائم ظل ہے

$$\text{لا}\,\frac{\text{فر لا}}{\text{فر س}}+\text{ما}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر س}}\ \text{یا}\ \text{ر}\,\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}}$$

۳۔ زنجیرہ (Catenary) $\text{ما}=\text{ج جمز}\,\frac{\text{لا}}{\text{ج}}$ کی کسی قوس کو جو راس سے شروع ہوتی ہے، مرتب کے گرد گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اسکی منحنی سطح $\pi\,(\text{ج لا}+\text{ما س})$ ہے جہاں لا، ما، س اس قوس کے دوسرے سرے سے متعلق ہیں۔

۴۔ گردشی سکافی نما سے محور پر علی القوائم مستوی سے منحنی سطح کا جو حصہ کٹتا ہے وہ ہے

$$\frac{\text{۱}}{\text{۶}}\,\frac{\pi\,\text{ب}}{\text{فا}^{\text{۲}}}\left\{(\text{۴ف}^{\text{۲}}+\text{ب}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}-\text{ب}^{\text{۳}}\right\}$$

* صفحہ ۳۷۴ کے نیچے نوٹ دیکھو۔

جہاں محور کا طول ف ہے اور احاطہ کرنے والے دائرہ کا نیم قطر ب ۔

۵ ۔ مکافی ما۲ = ۴ ا لا کی قوس کو جو مبدأ اور معین لا = ۳ ا کے درمیان ہے محور لا کے گرد گھمانے سے جو منحنی سطح پیدا ہوتی ہے وہ ۵۶/۳ π ا۲ ہے ۔

۶ ۔ مکافی کی قوس کا وہ حصہ جو راُس اور وتر خاص کے درمیان واقع ہے ۲۷۹
محور کے گرد پھرایا گیا ہے، ثابت کرو کہ مجسم کی منحنی سطح قاعدہ کے رقبہ کی ۲۱۹ء۱ گنا ہے ۔

۷ ۔ دائرہ کی قوس اپنے وتر کے گرد گھومتی ہے، ثابت کرو کہ سطح جو پیدا ہوتی ہے وہ ہے ۴ π ا۲ (جب عا ۔ عا جم عا)، جہاں ا نیم قطر ہے اور قوس کا زاوی ناپ ۲ عا ہے ۔

۸ ۔ نیم قطر ا کے دائرہ کا ربع اپنے سرے پر کے مماس کے گرد گھومتا ہے، ثابت کرو کہ منحنی سطح کا رقبہ π (π ۔ ۲) ا۲ ہے ۔

۹ ۔ نیم قطر ا کا ایک ثابت کرہ ہے ۔ اسکی سطح پر کے کسی نقطہ کو مرکز مان کر نیم قطر ر کا ایک متغیر کرہ بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ اسکی سطح کا رقبہ جو ثابت کرہ کے حائل ہونے سے قطع ہوتا ہے وہ زیادہ سے زیادہ ہے جبکہ ر = ۴/۳ ا ۔

۱۰ ۔ کرہ کا ایک مماسی مخروط کھینچا گیا ہے اور مخروط کے راُس کو مرکز مان کر دو کروی سطحیں کھینچی گئی ہیں جو کرہ اور مخروط دونوں کو قطع کرتی ہیں ۔ ثابت کرو کہ کرہ اور مخروط پر جو منطقے قطع ہوتے ہیں ان کے رقبے مساوی ہیں ۔

امثلہ ۳۹

تقریبی تربیع ۔ اوسط قیمتیں

۱ ۔ لوگ و ۲ کو ضابطہ لوگ و ۲ = ∫ (۰ سے ۱) فرلا / (۱+لا) سے حاصل کرنیکے لئے سمپسن کا قاعدہ لگاؤ ۔ [ٹھیک قیمت ہے لوگ و ۲ = ...۶۹۳۱۴۷ء]

۲ ۔ π کی قیمت ضابطہ π/۶ = ∫ (۰ سے ۱/۲) فرلا / √(۱ ۔ لا۲) سے حاصل کرو ۔

۳ — (دفعہ ۱۱۴) تین معین والے سمسن کے طریقہ میں، درمیانی معین $ط_2$ معینوں $ط_1$، $ط_3$ سے غیر مساوی فاصلوں ھ، ک پر ہے، اس صورت میں ضابطہ ہے

$$\frac{1}{6}(ھ+ک)(ط_1+4ط_2+ط_3)+\frac{1}{6}(ھ^2-ک^2)\left(\frac{ط_1-ط_2}{ھ}-\frac{ط_2-ط_3}{ک}\right)$$

۴ — قطع ناقص کے قطر مساوی زاوی وقفوں پہ کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان قطروں کے مربعوں کا اوسط، اعظم اور اصغر محوروں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

۵ — طول ا کے خط مستقیم پر ایسے ہی کوئی نقطہ لے لیا گیا ہے، ثابت کرو کہ دو حصوں کی سطح کا اوسط رقبہ $\frac{1}{6}$ $ا^2$ ہے اور دو حصوں کے مربعوں کے مجموعہ کی اوسط قیمت $\frac{2}{3}$ $ا^2$ ہے۔

۶ — اگر ایک نقطہ مستقل اسراع کے ساتھ حرکت کرے تو وقت کے مساوی اور لامتناہی چھوٹے وقفوں پر کی رفتاروں کا اوسط مربع ۲۸۰

$$\frac{1}{3}(و_ب^2+و_ب\,و_1+و_1^2)$$ کے مساوی ہے جہاں $و_ب$ اور $و_1$ ابتدائی اور آخری رفتاریں ہیں۔

۷ — سادہ موسیقی حرکت میں ثابت کرو کہ اوسط توانائی بالحرکت، زیادہ سے زیادہ توانائی بالحرکت کا نصف ہے۔

۸ — ایک ذرہ، دی ہوئی رفتار، مگر اختیاری زاویہ ارتفاع سے پھینکا گیا ہے، ثابت کرو کہ اوسط افقی ٹپہ (Range) زیادہ سے زیادہ ٹپہ کا ء۶۳۶۶ ہے۔

۹ — ناقص کے ماسکی نیم قطر مساوی زاوی وقفوں پر کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان ماسکی نیم قطروں کا اوسط، نیم محور اصغر کے مساوی ہے۔

۱۰ — نیم کرہ کی منحنی سطح پر کے نقطوں کا اوسط فاصلہ قاعدہ کے مستوی سے نیم قطر کے نصف کے مساوی ہے۔

۱۱ — نیم کرہ کے قطب سے کروی سطح کے نقطوں کا اوسط فاصلہ ۰ء۹۴۲۹ ا ہے جہاں کرہ کا نیم قطر ا ہے۔

۱۲۔ دائری رقبہ کا نیم قطر ا ہے، مرکز سے، نیز محیط پر کے کسی نقطہ سے اس رقبہ پر کے نقطوں کے فاصلوں کے متکافیوں کی اوسط قیمتیں دریافت کرو۔

$$\left[\frac{۲}{\text{ا}}\ ,\ \frac{۴}{\pi\,\text{ا}}\right]$$

۱۳۔ ایک ڈنڈے کی شکل گردشی لمبوترے ناقص نما کی ہے جو بہت لمبا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا اوسط تراشی رقبہ مرکز پر کی تراش کے رقبہ کا دو تہائی ہے۔

۱۴۔ برقائی ہوئی گول ٹکیا پر سطحی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے $(\text{ا}^{۲}-\text{ر}^{۲})^{-\frac{۱}{۲}}$ جہاں ٹکیا کا نیم قطر ا ہے اور ر مرکز سے نقطہ کا فاصلہ ہے۔ اوسط کثافت کی نسبت مرکز پر کی کثافت کے ساتھ دریافت کرو۔

۱۵۔ اگر شہابوں (Comets) کے مدار فضا میں یکساں طور پر منقسم ہوتے تو طریق الشمس کے ساتھ ان کا اوسط میلان نیم قطری (°۵۷ء۲۹۶) ہوتا۔

۱۶۔ نیم قطر ا کی کروی سطح کے نقطوں کا اوسط فاصلہ ایک ایسے نقطہ پ سے جو مرکز سے فاصلہ ج پر ہے $\text{ج}+\frac{۱}{۳}\frac{\text{ا}^{۲}}{\text{ج}}$ ہے اگر پ کرہ کے باہر ہو اور $\text{ا}+\frac{۱}{۳}\frac{\text{ج}^{۲}}{\text{ا}}$ ہے اگر پ کرہ کے اندر ہو۔

۱۷۔ ایک دائرہ کا نیم قطر ا ہے، اس کے محیط پر کے نقطوں کا اوسط فاصلہ محیط پر کے ایک ثابت نقطہ سے ۱ء۲۷۳ ا ہے۔

۱۸۔ ایک دائری رقبہ کا نیم قطر ا ہے۔ اس پر کے نقطوں کا اوسط فاصلہ محیط پر کے ایک ثابت نقطہ سے ۱ء۱۳۲ ا ہے۔

۱۹۔ کرہ کے اندر کے نقطوں کا اوسط فاصلہ سطح پر کے ایک دئے ہوئے نقطہ سے $\frac{۶}{۵}$ ا ہے۔

۲۰۔ اگر زمین کے مرکز سے فاصلہ ر پر کثافت اس ضابطہ $\text{ث}=\text{ث}_{\cdot}\,\frac{\text{جب م ر}}{\text{م ر}}$ سے حاصل ہو جہاں م مستقل ہے تو ثابت کرو کہ

اوسط کثافت ہوگی $\text{۳ ث}\,\frac{\text{جب م ا} - \text{م ا جم م ا}}{\text{م}^{۳}\,\text{ا}^{۳}}$ جہاں ا زمین کا نیم قطر ہے۔

۲۱۔ کروی شکل کی کچھ کمیت ہے جس کی کثافت مرکز سے فاصلہ ر پر ث ہے، اگر نیم قطر ر کے ہم مرکز کرہ کے مادہ کی اوسط کثافت $\text{ث}_{۱}$ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{ث} = \text{ث}_{۱} + \frac{۱}{۳}\,\text{ر}\,\frac{\text{فر ث}_{۱}}{\text{فر ر}}$$

امثلہ ۴۰

اوسط مرکز

۱۔ تکمل سے ثابت کرو کہ منحرف کا اوسط مرکز متوازی اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے خط کی اِس نسبت ۲ ا + ب : ا + ۲ ب سے تقسیم کرتا ہے جہاں ا، ب متوازی اضلاع کے طول ہیں۔

۲۔ منحنی $\text{ص} = \text{ب جب}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ کی ایک نیم موج اور محور لا کے درمیان جو رقبہ ہے اِس کا اوسط مرکز اِس محور سے فاصلہ $\frac{۱}{۸}\,\pi\,\text{ب}$ پر ہے۔

۳۔ منحنی $\text{ص} = \frac{\text{ا}^{۳}}{\text{ا}^{۲} + \text{لا}^{۲}}$ اور محور لا کے درمیان جو رقبہ ہے اس کا اوسط مرکز $(۰، \frac{\text{ا}}{۴})$ ہے۔

۴۔ ربع دائرہ کے سروں پر مماس کھینچنے سے قوس اور ان مماسوں میں جو رقبہ گھر جاتا ہے اِس کا اوسط مرکز ہر مماس سے ۰.۲۲۳۴ ا ہے جہاں دائرہ کا نیم قطر ا ہے۔

۵۔ جو رقبہ مکافی $\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)^{\frac{۱}{۲}} + \left(\frac{\text{ص}}{\text{ب}}\right)^{\frac{۱}{۲}} = ۱$ اور محددوں کے محوروں کے درمیان گھرا ہوا ہے اِس کا اوسط مرکز نقطہ $(\frac{۱}{۵}\,\text{ا}، \frac{۱}{۵}\,\text{ب})$ پر ہے۔ رکھو $\text{لا} = \text{ا جب}^{۴}\,\text{طہ}$، $\text{ص} = \text{ب جم}^{۴}\,\text{طہ}$۔

۶۔ نیم قطر ا کے کرہ کو ایک ستوی کے ذریعہ جو مرکز سے فاصلہ ج پر ہے دو قطعوں میں تقسیم کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ اِن قطعوں کے اوسط مرکزوں کا فاصلہ

کرہ کے مرکز سے $\frac{3}{4} \times \frac{(ا \pm ج)^2}{2ا \pm ج}$ ہے۔

۷۔ نیم قطر ا کا ربع دائرہ ہے، اسکی قوس اور سروں کے مماسوں سے جو شکل بنتی ہے اسکو ایک مماس کے گرد پھرانے سے مجسم بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اِس مجسم کے اوسط مرکز کا فاصلہ راُس سے ۰٫۸۶۹ ا ہے۔ ۲۸۲

۸۔ نوکدار محراب کی شکل کا ٹھوس چھترہ مکافی رقبہ اپ ن کو پ ن کے گرد پھرانے سے بنایا گیا ہے جہاں ا راُس ہے اور پ ن معین ہے، ثابت کرو کہ اِس کا اوسط مرکز محور کو نسبت ۵ : ۱۱ میں تقسیم کرتا ہے۔

۹۔ راُس سے شروع ہو کر مکافی کی ایک قوس اپ ہے اور پ ن راس پر کے مماس پر عمود ہے۔ ثابت کرو کہ شکل اپ ن کو ان کے گرد گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اسکے اوسط مرکز کا فاصلہ ا سے $\frac{5}{6}$ ان کے مساوی ہے۔

۱۰۔ دو مساوی مستدیر اسطوانے ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ اِس حجم کا اوسط مرکز جو ان اسطوانوں اور اِن کے محوروں کے مستوی کے درمیان ہے، اِس مستوی سے $\frac{3}{8}$ ا کے فاصلہ پر ہے۔ جہاں ا مشترک نیم قطر ہے۔

۱۱۔ ربع دائرہ اپنے ایک سرے پر کے مماس کے گرد گھومتا ہے، اِس طرح سے جو حجم پیدا ہوتا ہے اسکی منحنی سطح کا اوسط مرکز راُس سے ۰٫۸۷۶ ا کے فاصلہ پر ہے۔

۱۲۔ لنگر چھلے کو اسطوانی مستوی سے تراشنے سے جو دو مساوی حصے ہو جاتے ہیں اِن میں سے کسی حصہ کی منحنی سطح کے اوسط مرکز کا فاصلہ اِس اسطوانی

مستوی سے $\frac{2\pi}{ب}$ ہے جہاں ب تکوینی دائرہ کا نیم قطر ہے۔

۱۳۔ لنگر چھلے کو اسطوانی مستوی سے تراشنے سے اس کے جو دو مساوی حصے ہو جاتے ہیں انہیں سے کسی ایک کے حجم کا اوسط مرکز اسطوانی مستوی سے فاصلہ $\frac{4ب}{3\pi}$

پر ہے جہاں ب تکوینی دائرہ کا نیم قطر ہے۔

۱۴- ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کو محور ما دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے، کسی ایک حصہ کو محور لا کے گرد پھرانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اسکی منحنی سطح کا اوسط مرکز، مرکز سے فاصلہ

$$\frac{۲}{۳} \times \frac{ا^2 + ا ب + ب^2}{ا + ب} \times \frac{ا}{ب + (ا\ جب^{-1}\ ز)/ز}$$

پر واقع ہے جہاں ز خروج المرکز ہے۔ یہ مان لیا گیا ہے کہ $ب < ا$ ۔ متناظر نتیجہ حاصل کرو جبکہ $ب > ا$ ۔

۱۵- بپیس کے مسئلے لگانے سے قائم مستدیر مخروط اور قائم مستدیر مخروط ناقص کا حجم اور اسکی منحنی سطح دریافت کرو۔

۱۶- نیم قطر ا کے ایک اسطوانہ کے گرد ایک نالی کاٹی گئی ہے جس کی عمودی تراشش نیم قطر ب والا ایک نصف دائرہ ہے، ثابت کرو کہ حجم جو نکال دیا گیا ہے وہ ہے $\pi^2 ا ب^2 - \frac{۴}{۳} \pi ب^3$

نیز نالی کی سطح ہے $۲\pi^2 ا ب - ۴\pi ب^2$

۲۸۳ ۱۷- ایک مستدیر اسطوانہ کا نیم قطر ر ہے، اس کی سطح پہ مستطیلی تراشش کا ایک پیچ تاگا کاٹا گیا ہے، ثابت کرو کہ تاگے کے ایک پھیر کا حجم $۲\pi ا ب ر + \pi ا ب^2$ ہے جہاں ا، ب مستطیل کے ضلعے ہیں اور ا وہ ضلع ہے جو اسطوانہ کی سطح پر عمود وار ہے۔

۱۸- ایک بند منحنی کے محیط کے اوسط مرکز میں سے ایک خط مستقیم کھینچا گیا ہے اور یہ محیط کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان حصوں کو اس خط کے گرد گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتے ہیں ان کی منحنی سطحیں مساوی ہیں۔

۱۹- رقبہ ق محاور لا اور ما کے گرد گھومنے سے جسم ۶ اور ۹ بالترتیب پیدا کرتا ہے۔ بتاؤ کہ کیا رقبہ پیدا ہوگا اگر یہ خط لا جم عہ + ما جب عہ = ع کے گرد گھومے۔ اس میں مان لیا جائے کہ

خطا رقبے کو نہیں کاٹتا۔

امثلہ ۱۴

ضعفی تکملے

۱- تکملات $\iint(\text{لا}^2+\text{ما}^2)\,\text{فرلا}\,\text{فرما}$ ، $\iint\left(1-\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}-\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}\right)\text{فرلا}\,\text{فرما}$ کی قیمتیں دریافت کرو جبکہ انہیں ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=1$ کے رقبہ پر لیا جائے۔

۲- ثابت کرو کہ اسطوانوں $\text{لا}^2+\text{ما}^2=2\,\text{ا}\,\text{لا}$ ، $\text{ی}^2=2\,\text{ا}\,\text{لا}$ کے درمیان کا حجم $\frac{128}{18}\,\text{ا}^3$ ہے۔

۳- نیم قطر ۲ا کا ایک کرہ بنایا گیا ہے جبکہ اس کا مرکز نیم قطر ا کے اسطوانہ کی سطح پر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ اسطوانہ کی سطح کا جو حصہ کرہ کے اندر ہے اس کا رقبہ $16\,\text{ا}^2$ ہے۔

۴- حجم جو ناقصی مکافی نما $2\,\text{ی}=\frac{\text{لا}^2}{\text{پ}}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ق}}$ ، اسطوانہ $\text{لا}^2+\text{ما}^2=\text{ا}^2$ اور مستوی ی = ۰ کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ ہے $\frac{\pi\,\text{ا}^4(\text{پ}+\text{ق})}{8\,\text{پ}\,\text{ق}}$

۲۸۴

نواں باب

خاص منحنی

۱۱۹- جبریہ منحنی جو ایک تشاکل کا محور رکھتے ہیں۔

ما = ف (لا) .... (۱)

کے نمونہ کے جبریہ منحنیات کو مرتسم کرنیکے طریقوں کی توضیح اس کتاب کے مختلف حصوں میں کی گئی ہے جہاں ف (لا) منطق تفاعل تھا اور ان ترسیمی طریقوں میں متقاربوں، اعظم اقل معینوں اور نقاط انعطاف کا دریافت کرنا بھی شامل تھا (دیکھو دفعات ۱۳، ۱۴، ۵۱، ۶۷)

عام طور پر جبریہ منحنیات کا مطالعہ اس کتاب کے حدود سے باہر ہے لیکن نمونہ

ما² = ف (لا) .... (۲)

کے منحنیات کی بحث میں کچھہ جگہہ وقف کر دینا سودمند ہوگا۔

اس مساوات سے لا کی کسی قیمت کے جواب میں ما کی دو مساوی لیکن مختلف العلامت قیمتیں ملتی ہیں، اس لئے منحنی محور لا کے گرد متشاکل ہے نیز چونکہ ما² لازماً مثبت ہے اس لئے لا کی اُن معینوں کے اندر (اگر ایسی موجود ہوں) جن کے لئے ف (لا) منفی ہے منحنی کا کوئی حقیقی حصہ نہیں ہوسکتا۔

مثلاً اگر ف (لا) میں ایک سادہ جزو ضربی لا - ل١ شامل ہوتا ہے اور اس لئے مساوات یہ شکل اختیار کرتی ہے

ما² = (لا - ل١) ف١ (لا) .... (۳)

تو بائیں جانب کا رکن علامت بدلتا ہے جیسے لا، لا۱ کی قیمت میں سے گزرتا ہے۔ اِس لئے (لا۱، ۰) کے ایک جانب معین خیالی ہے۔

نیز اس نقطہ پر

$$\left(\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}\right)^{2} = \frac{\text{ما}^{2}}{(\text{لا} - \text{لا}_1)^{2}} = \frac{\text{فہ}(\text{لا})}{\text{لا} - \text{لا}_1}$$

اور اس لئے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \infty$، اِس لئے مماس و لا پر عمود وار ہے۔

اگر برعکس اِسکے ف (لا) دوہرا جزو ضربی رکھتا ہو مثلاً

$$\text{ما}^{2} = (\text{لا} - \text{لا}_1)^{2}\,\text{فہ}(\text{لا}) \quad \text{.......... (۴)}$$

تو بائیں جانب کا جملہ علامت نہیں بدلتا جبکہ لا قیمت لا۱ میں سے گزرتا ہے۔ ۲۸۵
اسلئے معین نقطہ (لا۱، ۰) کے دونوں جانب حقیقی ہے یا دونوں جانب خیالی۔ پہلی صورت میں نقطہ زیر بحث میں سے منحنی کی دو شاخیں ہیں جو ایک زاویہ پر قطع کرتی ہیں اور ایک "عقدہ" بناتی ہیں۔ دوسری صورت میں (لا۱، ۰) طاق پر اکیلا یا "مزدوج" نقطہ ہے۔ عقدہ پر مماسی خطوط کی سمتیں حسب ذیل حاصل ہوتی ہیں

$$\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{2} = \underset{\text{لا}\to\text{لا}_1}{\text{نہا}}\ \frac{\text{ما}^{2}}{(\text{لا} - \text{لا}_1)^{2}} = \text{فہ}(\text{لا}_1)$$

اگر ف (لا) تہرا جزو ضربی رکھتا ہو مثلاً

$$\text{ما}^{2} = (\text{لا} - \text{لا}_1)^{3}\,\text{فہ}(\text{لا}) \quad \text{.......... (۵)}$$

تو بائیں جانب کا جملہ نقطہ (لا۱، ۰) پر علامت بدلتا ہے۔ پس اِس نقطہ کے ایک جانب منحنی خیالی ہے۔ نیز چونکہ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ اس صورت میں صفر ہے منحنی محور لا کو مس کرتا ہے۔

یہاں چند مثالیں دیجاتی ہیں۔ ابتداءً ایسی صورتیں ہیں جن میں ف (لا) صحیح اور منطق بھی ہے۔

مثال ۱- جس صورت میں ف (لا) پہلے یا دوسرے درجہ کا ہے شلاً

ما^2 = الا + ب، ما^2 = الا^2 + ب لا + ج .... (۶)

تو منحنی ایک مخروطی ہے جس کا محور لا صدری محور ہے۔

مثال ۲- کعبی منحنیات

ما^2 = الا^3 + ب لا^2 + ج لا + د .... (۷)

میں بعض دلچسپ صورتیں شامل ہوتی ہیں۔

(ا) اگر بائیں جانب کے خطی اجزاے ضربی حقیقی اور الگ الگ ہوں تو اس مساوات کو یوں لکھا جاسکتا ہے

ا ما^2 = (لا - عہ) (لا - بہ) (لا - جہ) .... (۸)

اور یہ فرض کر لینے سے عمومیت کم نہیں ہو جاتی کہ ا مثبت ہے اور عہ < بہ < جہ لا < عہ کے لئے اور بہ < لا < جہ کے لئے معین خیالی ہیں۔ (عہ، ۰) اور (بہ، ۰) کے درمیان ما^2 کی اعظم قیمت ہے۔ اسلئے منحنی ایک بند حلقہ اور ایک لا انتہا شاخ پر مشتمل ہے۔ لا کی بڑی قیمتوں کے لئے

$$\frac{\text{ما}^2}{\text{لا}^3} = \frac{1}{\text{ا}}\left(1 - \frac{\text{عہ}}{\text{لا}}\right)\left(1 - \frac{\text{بہ}}{\text{لا}}\right)\left(1 - \frac{\text{جہ}}{\text{لا}}\right)$$

یعنی منحنی، لا کے محور پر تقریباً عمود وار ہونے جانیکا میلان رکھتا ہے۔

(ب) اگر (۷) کے بائیں طرف کا جملہ صرف ایک حقیقی جزو ضربی رکھتا ہو تو مساوات کو یوں لکھا جاسکتا ہے

ا ما^2 = (لا - عہ) (لا^2 + پ لا + ق) .... (۹)

جہاں پ^2 < ۴ ق۔ اس صورت میں منحنی محور لا سے صرف ایک دفعہ ملتا ہے۔

(ج) شکل (۸) سے شکل (۹) میں گذر دو طرح سے عمل میں آتا ہوا خیال کیا جاسکتا ہے ۲۸۶

ایک نقطۂ نظر یہ ہے کہ عہ، بہ، جہ میں سے بڑی دو قیمتوں کے مل جانے سے یہ خاص صورت پیدا ہو یعنی

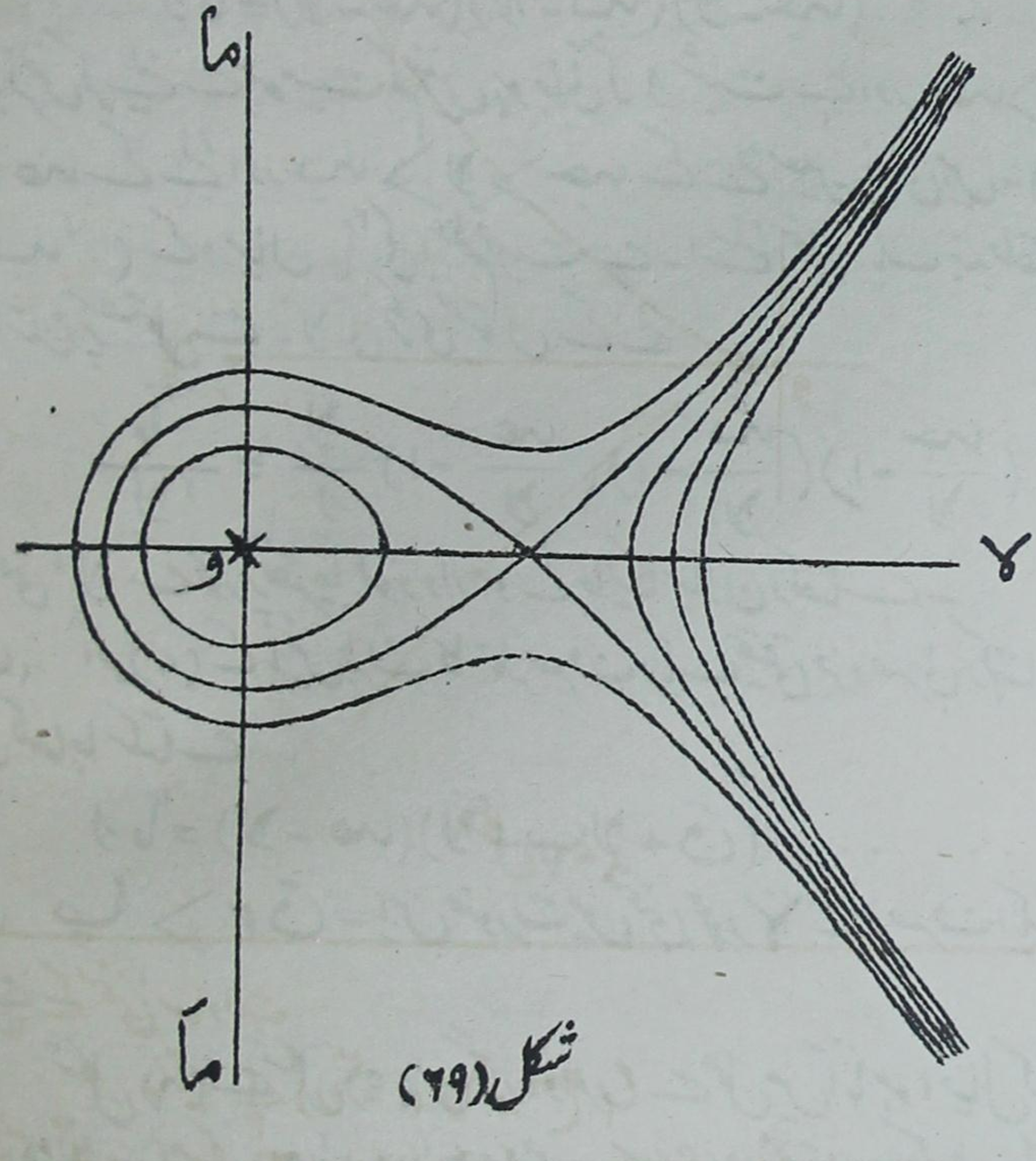
ا ما^2 = (لا - عہ) (لا - بہ)^2 .... (۱۰)

یہاں لا < عہ کے لئے ما خیالی ہے اور لا > عہ کے لئے حقیقی ہے لیکن لا = بہ کے لئے یہ صفر ہوتا ہے۔ نقطہ (بہ، ۰) یہاں عقدہ ہے۔ اسے یوں خیال کیا جا سکتا ہے کہ پہلی صورت کے حلقہ اور لا متناہی شاخ کے ملنے سے یہ پیدا ہوا ہے۔

(د) اگر عہ، بہ، جہ میں سے دو چھوٹی قیمتیں مل جائیں تو

ا ما۲ = (لا - عہ)۲ (لا - جہ) ....(۱۱)

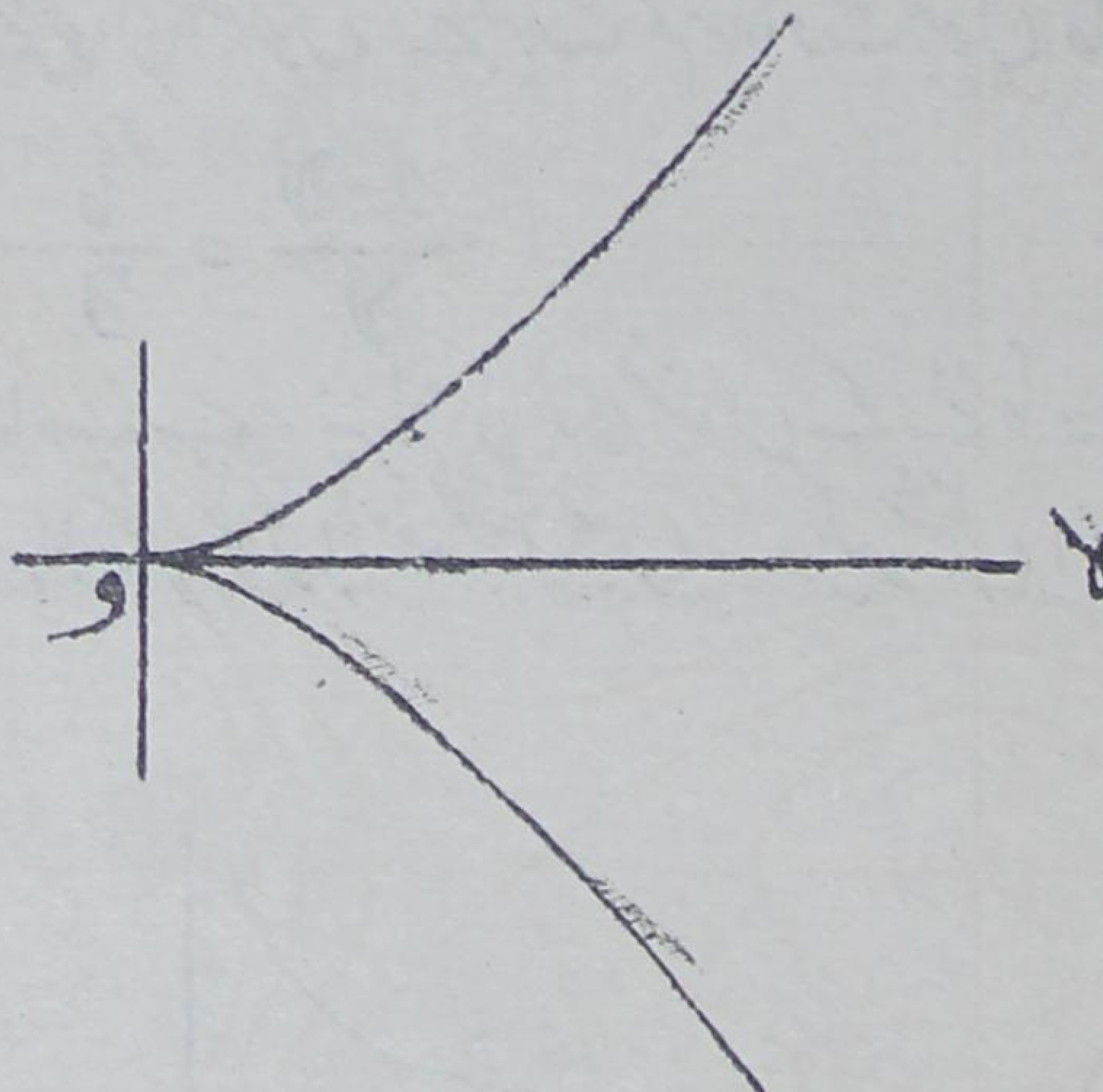
لا < جہ کے لئے ما خیالی ہوگا سوائے لا = ا کے جبکہ یہ صفر ہوگا اس صورت میں نقطہ (عہ، ۰) اکیلا نقطہ ہے۔ ایسا خیال کیا جا سکتا ہے کہ صورت اول کے حلقہ کے معدوم ہو جانے سے یہ شکل پیدا ہوتی ہے۔



شکل (۶۹)

اِن تمام صورتوں کی شکل (۶۹) میں توضیح کی گئی ہے۔ دائیں جانب سے شروع ہو کر نمونہ (۹) کا ایک منحنی ملتا ہے جو ایک اکیلی لا متناہی شاخ پر مشتمل ہے۔

اسکے بعد وہ صورت جس میں لاتناہی شاخ ہے اور اسکے ساتھ اکیلا نقطہ (۱، ۰) ۳۸۷
لگا ہوا ہے، اس کی مساوات نمونہ (۱۱) کی ہے۔ اس ترتیب میں اگلی صورت یہ ہے لاتناہی شاخ اور نقطہ و کے گرد بیضوی حلقہ، یہ نمونہ (۸) کی مساوات ہے۔ اس سے بعد کی منزل میں بیضوی حلقہ اور لاتناہی شاخ مل گئے ہیں اور ملنے سے عقدہ مع ایک حلقہ کے پیدا کرتے ہیں، مماثل نمونہ کی مساوات (۱۰) ہے۔ آخیر میں ایک اکیلی شاخ ہے جو حلقہ کے باہر سے گزرتی ہے، اس کے لئے پھر نمونہ (۹) کی مساوات ہے*۔



شکل (۷۰)

---

* شکل کے منحنی مساوات

$$\text{ما}^2 = \frac{1}{4}\left(\text{لا}^3 - 3\,\text{لا}^2 + \text{ج}\right)،$$

سے مرتسم کئے گئے ہیں، جبکہ ج = -۲، ۰، ۲، ۴، ۶ - ان کا باہمی ربط آسانی سے ذہن میں آسکتا ہے اگر انہیں ایک سطح (دفعہ ۳۴) کے متواتر گھیرا خطوط⊙ خیال کیا جائے مثلاً یہ سطح پہاڑی دامن میں کسی چوٹی کے قرب و جوار کی منحنی سطح ہو سکتی ہے۔

⊙ Contour lines

(ع) نہایت ہی خاص صورت میں جبکہ تینوں مقداریں عما، بما، جما منطبق ہو جائیں تو

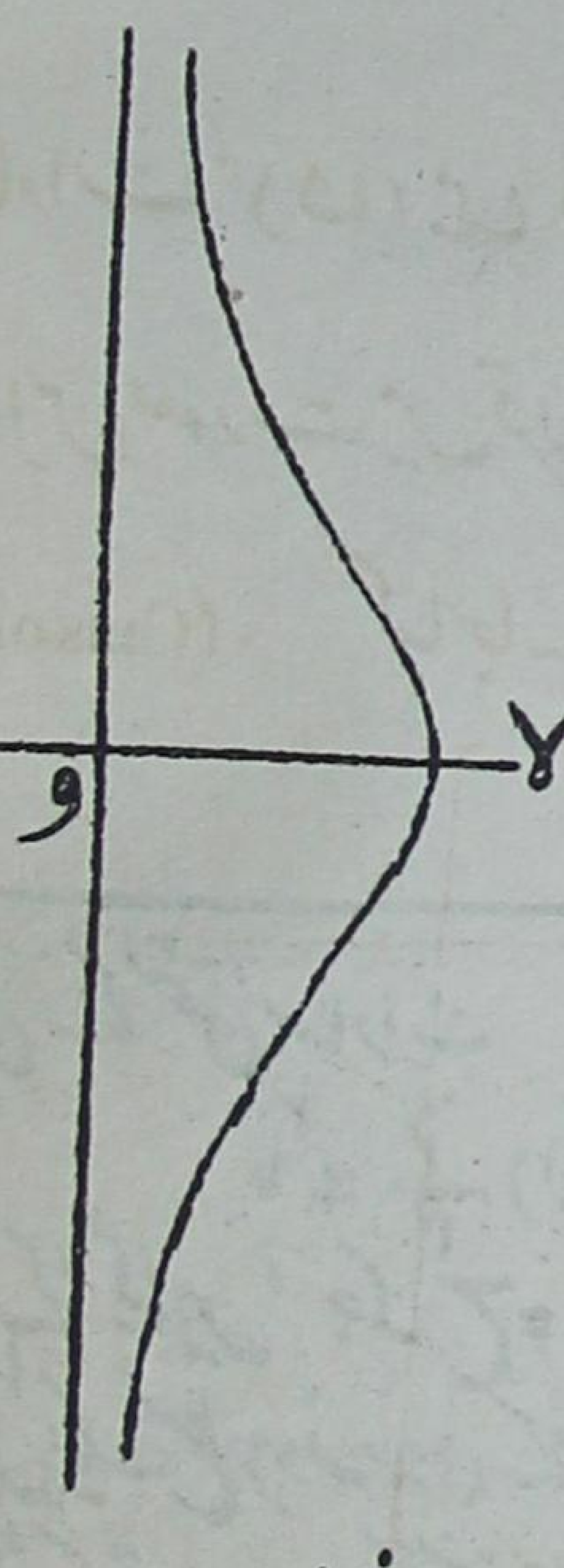
$$ر\,ما^{۲} = (لا - عما)^{۳} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۳)$$

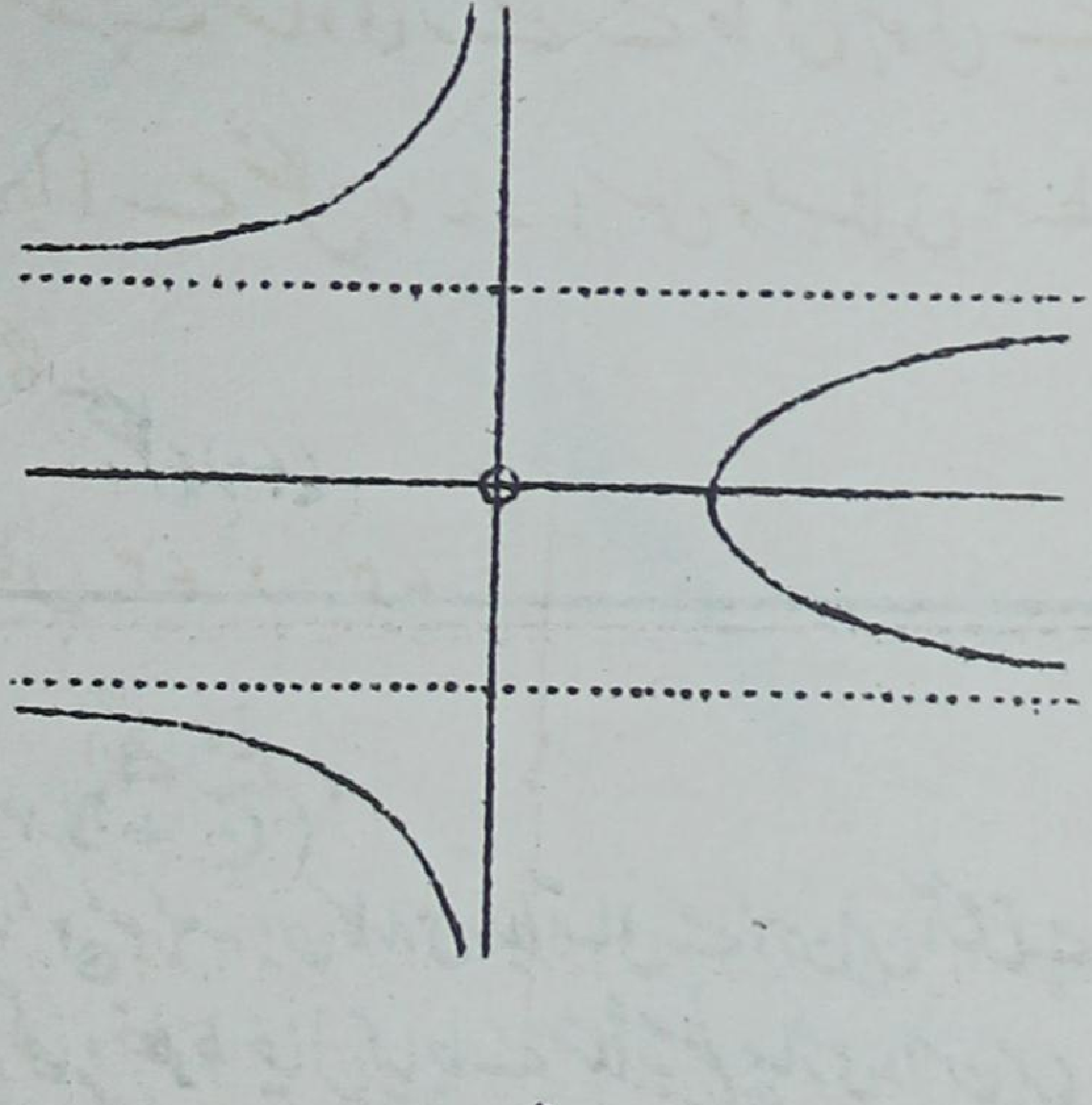
اس صورت میں منحنی "نیم کعبی مکافی" کہلاتا ہے۔ اسکے (عما، ۰) پر ایک قرن ہے۔ اسے عقدہ کی انتہائی شکل خیال کیا جا سکتا ہے جو حلقہ کے معدوم ہو جانے سے پیدا ہو سکتی ہے۔ دیکھو شکل ۷۰، جہاں عما = ۰۔

اگر مساوات (۲) میں ف (لا) منطق ہو مگر صحیح نہ ہو تو نسب نما کی حقیقی اصلوں سے (اگر کوئی ہوں) متقارب ملیں گے جو محور ما کے متوازی ہونگے بشرطیکہ لا کی ایسی قیمتوں کے لئے جو ان اصلوں سے بہت کم متفاوت ہوں ما^۲ مثبت ہو۔

مثال ۳۔ $\frac{ما^{۲}}{ر^{۲}} = \frac{لا - ۱}{لا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۴)$ ۲۸۸

محور ما متقارب ہے، نیز لا کی بڑی قیمتوں کے لئے ما = ± ر تقریباً، لا = ۰ اور لا = ۱ کے درمیان منحنی کا کوئی حصہ حقیقی نہیں۔ دیکھو شکل ۷۱۔





شکل (۷۲) شکل (۷۱)

مثال ۴۔
$$\frac{\text{ما}^2}{\text{ا}^2} = \frac{\text{ا} - \text{لا}}{\text{لا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۴)$$

لا منفی کے لئے اور لا > ا کے لئے ما خیالی ہے۔ دیکھو شکل ۷۲۔

اس منحنی کو اگنیسی کی ڈائن (Witch of Agnesi) کہتے ہیں۔

مثال ۵۔
$$\text{ما}^2 = \text{لا}^2 \, \frac{\text{ا} + \text{لا}}{\text{ب} - \text{لا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۵)$$

مبدأ پر عقدہ ہے اور منحنی محور لا کو دوبارہ (-ا، ۰) پر کاٹتا ہے۔ اگر

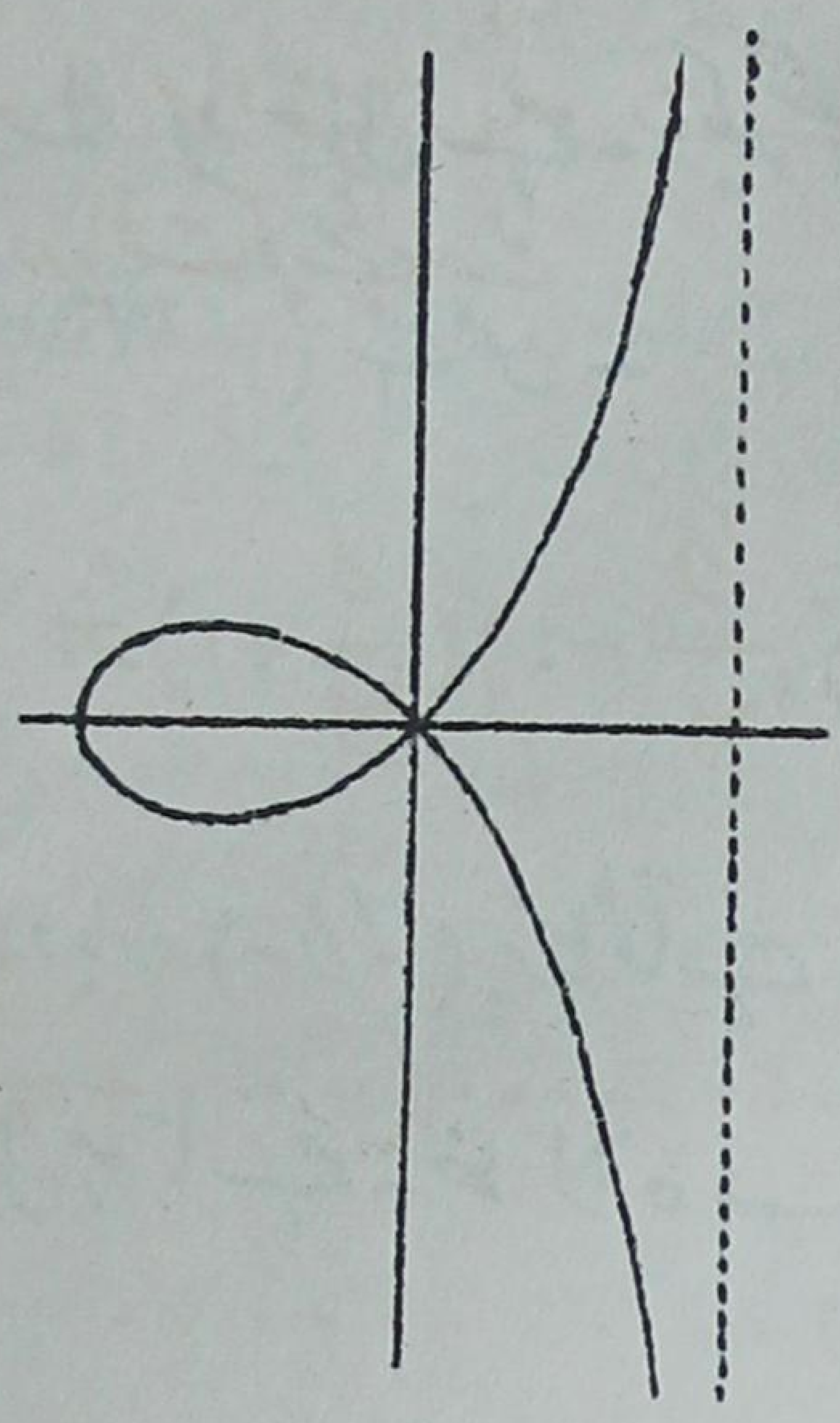
لا > ب یا لا < -ا تو ما خیالی ہوتا ہے۔ خط لا = ب

متقارب ہے۔ دیکھو شکل ۷۳۔

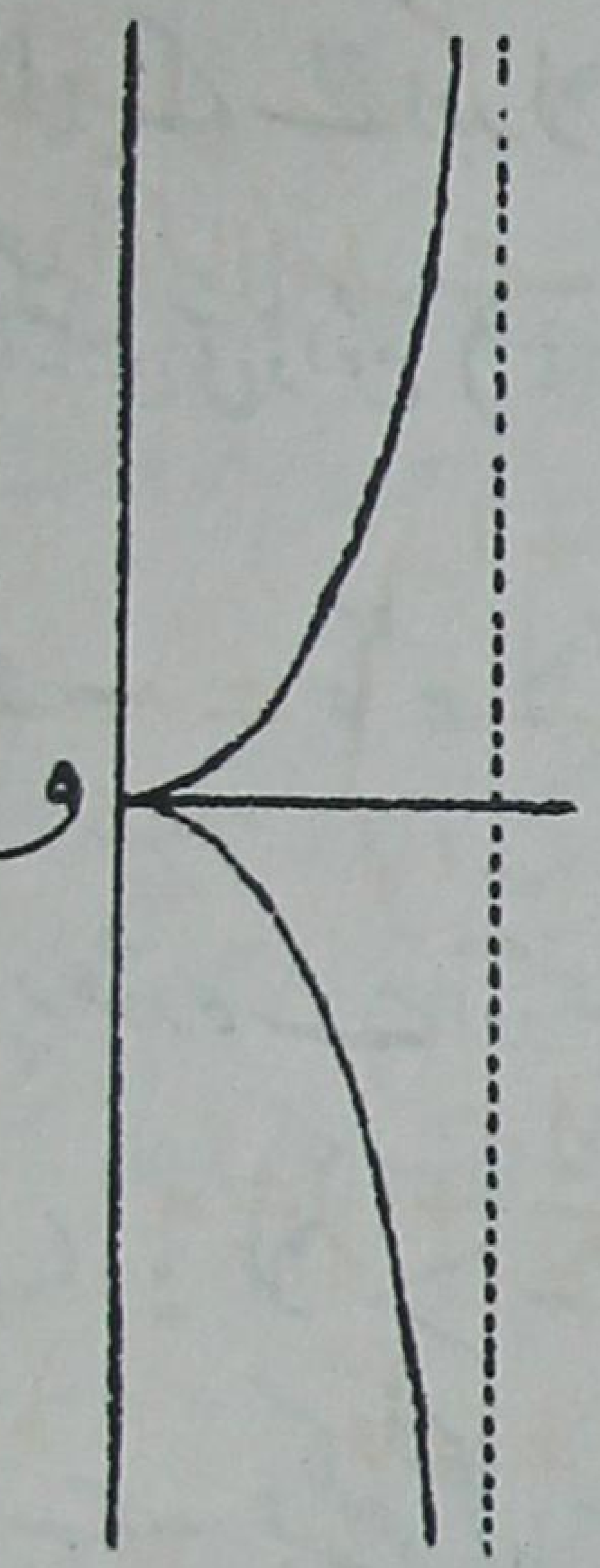
مثال ۶۔
$$\text{ما}^2 = \frac{\text{لا}^3}{\text{ب} - \text{لا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۶)$$

یہ مساوات، (۱۵) میں ا کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ حلقہ اس صورت میں قرن ہو جاتا ہے شکل ۷۴۔ اس کو لبلابی خط (Cissoid) کہا جائے گا۔

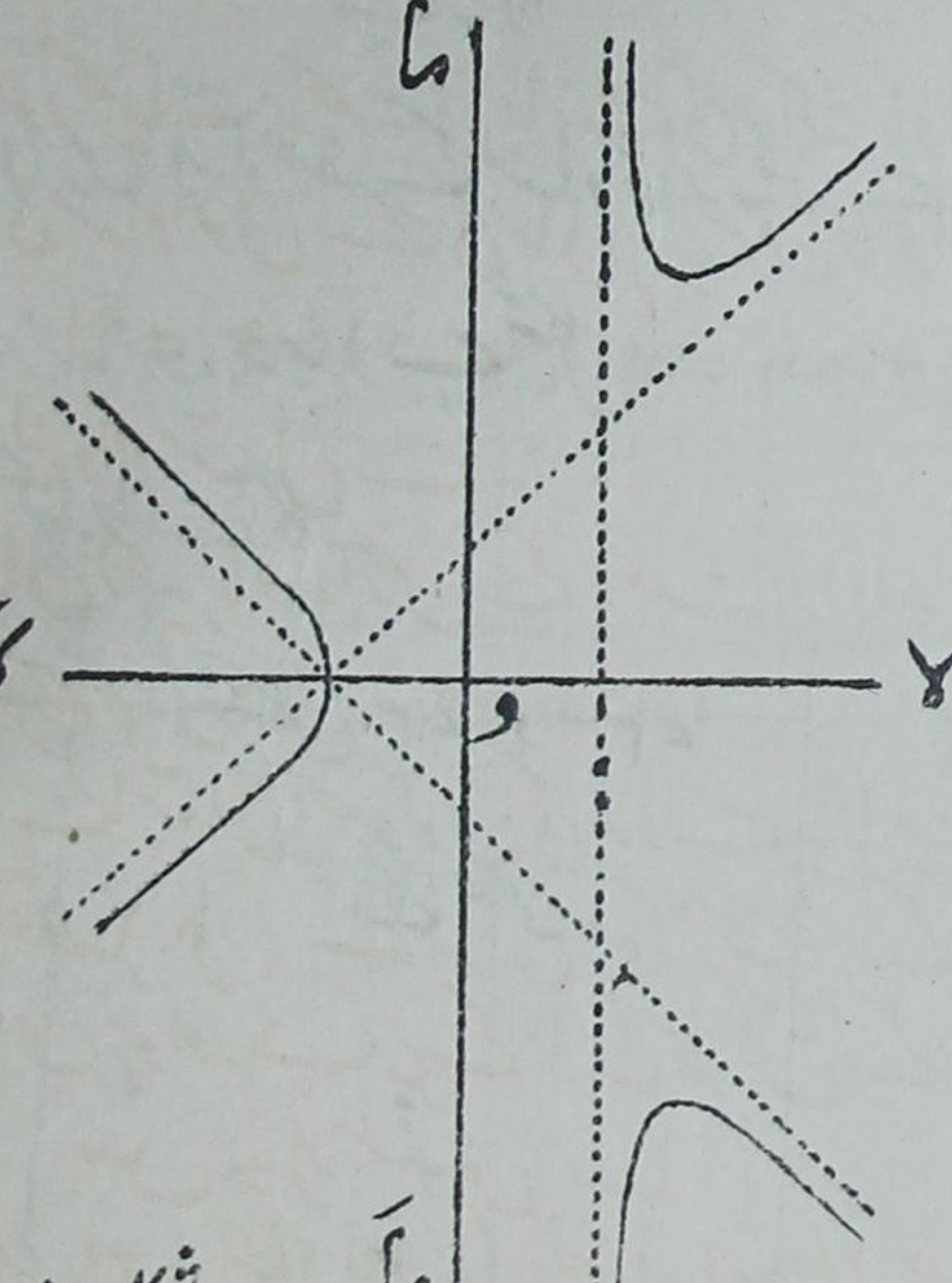
اشکال ۷۳ و ۷۴
اگلے صفحہ
پر
ہیں۔



شکل (۷۳)



شکل (۷۴)



شکل (۷۵)

۲۹۰ مثال ۷۔ $\text{ما}^2 = \text{لا}^2 \dfrac{\text{لا} + \text{ا}}{\text{لا} - \text{ا}}$ ....(۱۷)

چونکہ ما خیالی ہے جبکہ $\text{ا} > \text{لا} > -\text{ا}$ سوائے اس صورت کے جبکہ $\text{لا} = ۰$، مبدأ اکیلا نقطہ ہے۔ مائل متقارب دریافت کرنیکے لئے

$$\frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \pm \left(\frac{\frac{\text{ا}}{\text{لا}} + 1}{1 - \frac{\text{ا}}{\text{لا}}} \right)^{\frac{1}{2}} = \pm \left(1 + \frac{\text{ا}}{\text{لا}}\right)\left(1 - \frac{\text{ا}^2}{\text{لا}^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \pm \left(1 + \frac{\text{ا}}{\text{لا}} + \frac{1}{2}\,\frac{\text{ا}^2}{\text{لا}^2} + \cdots\cdots \right) \quad \text{..........(۱۸)}$$

اس لئے خطوط $\text{ما} = \pm(\text{لا} + \text{ا})$ ....(۱۹)

متقارب ہیں۔ شکل ۷۵۔

۱۲۰ ۔ ماورائی منحنی ۔ زنجیرہ ۔ خط بکّری (Tractrix)

اب چند مشہور منحنیات پر بحث کی جائے گی جو اکثر ماورائی ہیں اور جن کی تعریف اُس نمونہ کی مساواتوں سے کی جاتی ہے جن کا حوالہ دفعہ ۱۱۶ میں دیا گیا ہے یعنے

$$\text{لا} = \text{فا}(\text{تا})،\quad \text{ما} = \text{خا}(\text{تا})$$

جہاں تا بدلنے والا استبدل ہے۔

جو شکل ایک یکساں زنجیر جاذبہ ارض کے ماتحت آزادانہ طور پر لٹکنے سے اختیار کرتی ہے اسے ہم زنجیرہ (Catenary) کہینگے۔ سکونیات کے ابتدائی اصولوں کی مدد سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر سب سے نچلے نقطہ (ا) سے شروع ہو کر زنجیر پر کے کسی نقطہ پ تک کا قوسی طول س ہو اور پ پر کے مماس کا افق کے ساتھ میلان سا ہو تو

$$\text{س} = \text{ا}\ \text{مس}\ \text{سا} \quad \text{..........(۲)}$$

جہاں ا مستقل ہے۔ اس لئے اگر لا، ما افقی اور انتصابی محدد ہوں تو

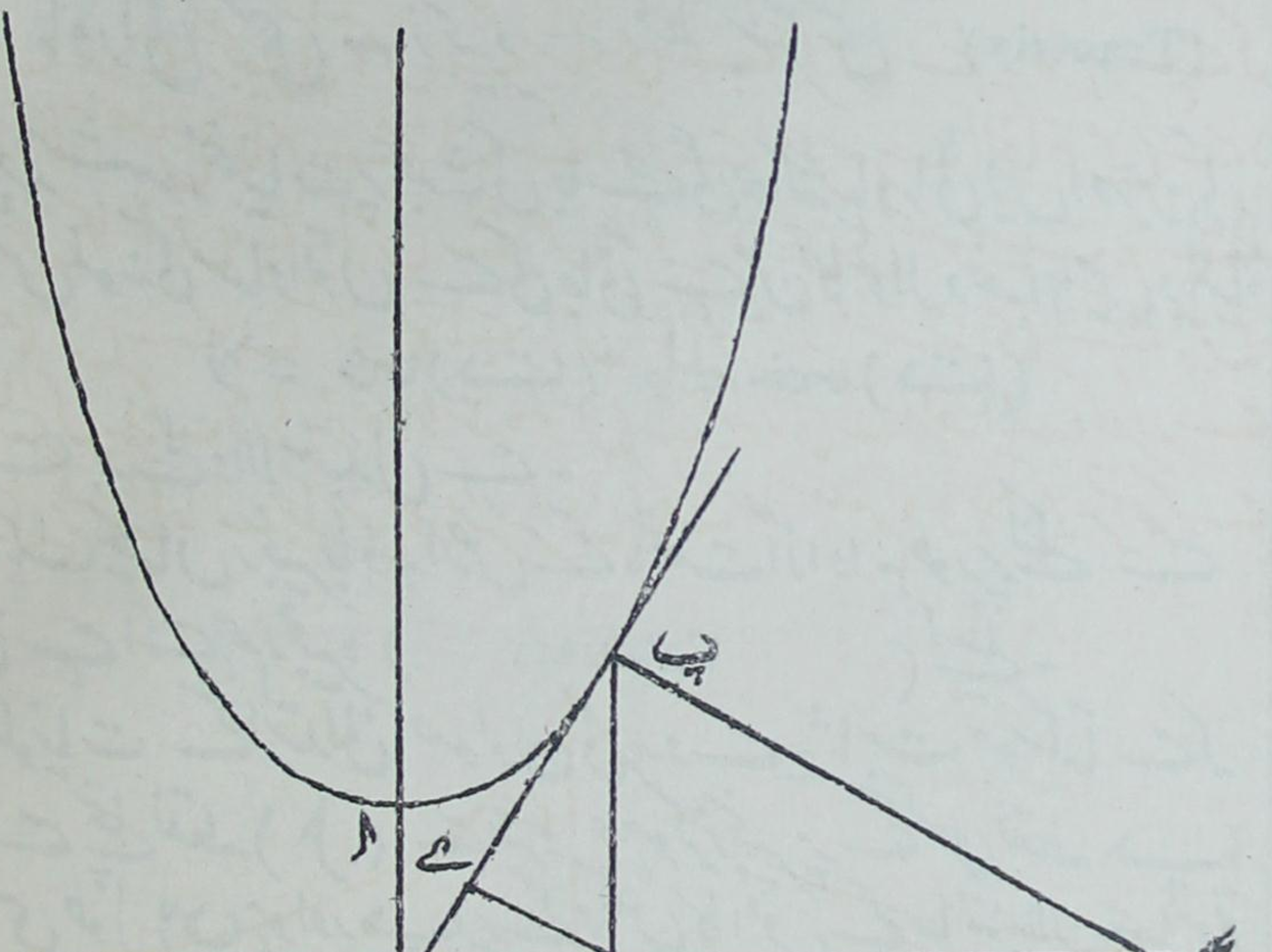
$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرسا}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}} = \text{جم سا} \times \text{ا قط}^{2}\text{سا} = \text{ا قط سا}$$

$$\frac{\text{فرحا}}{\text{فرسا}} = \frac{\text{فرحا}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}} = \text{جب سا} \times \text{ا قط}^{2}\text{سا} = \text{ا سس سا قط سا}$$

(۳) ....

تکمل کرنے سے $\text{لا} = \text{ا لوگ سس} \left(\frac{\text{ط}}{۴} + \frac{\text{سا}}{۲} \right)$، $\text{حا} = \text{ا قط سا}$ .....(۴)

مستقل حذف کردینے سے یہ مراد ہے کہ مبدأ کو کسی خاص نقطہ پر لیا گیا ہے جس کا اب تک تعین نہیں کیا گیا تھا۔ چونکہ ضابطہ (۴) سے لا = ۰ اور حا = ا جبکہ سا = ۰۔ اس لئے ظاہر ہے کہ مبدأ نقطہ ا کے انتصاباً نیچے فاصلہ ا پر واقع ہے۔ (۴) سے کارٹیزی مساوات بآسانی حاصل ہوسکتی ہے۔ ۷۹۱



شکل (۷۶)

$$\frac{\text{لا}}{\text{ز}} = \text{لوک}\ \text{سں}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\text{سا}}{2}\right) = \text{لوک}\left(\text{قط سا} + \text{سں سا}\right)$$

جس سے

$$\left.\begin{aligned} \text{قط سا} + \text{سں سا} &= \text{فو}^{\frac{\text{لا}}{\text{ز}}} \\ \text{قط سا} - \text{سں سا} &= \text{فو}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ز}}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

اس لئے جمع اور تفریق سے

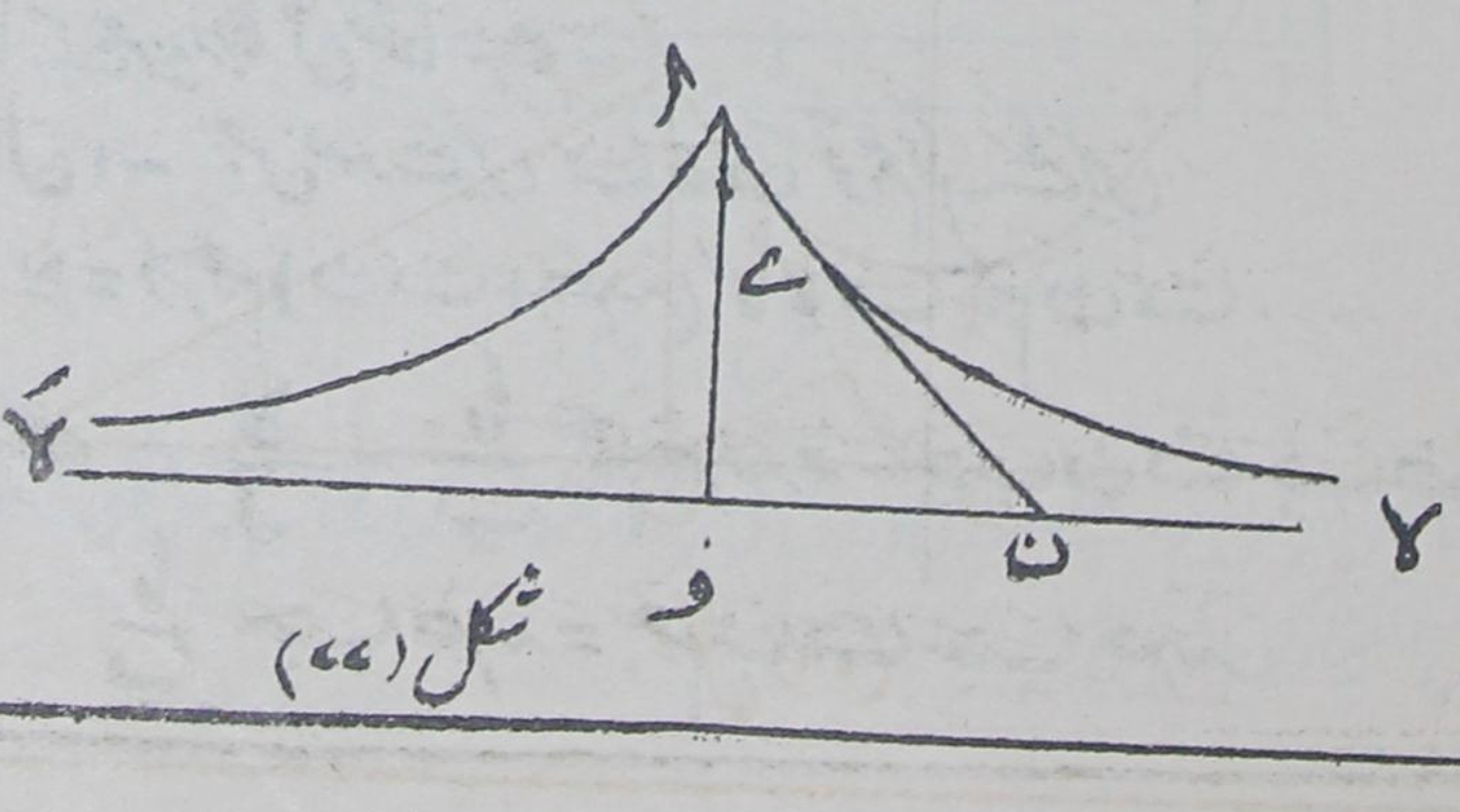
$$\left.\begin{aligned} \text{ما} = \text{ز قط سا} &= \frac{\text{ز}}{2}\left(\text{فو}^{\frac{\text{لا}}{\text{ز}}} + \text{فو}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ز}}}\right) = \text{ز جمز}\ \frac{\text{لا}}{\text{ز}} \\ \text{س} = \text{ز سس سا} &= \frac{\text{ز}}{2}\left(\text{فو}^{\frac{\text{لا}}{\text{ز}}} - \text{فو}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ز}}}\right) = \text{ز جمن}\ \frac{\text{لا}}{\text{ز}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(6)$$

بعض اور خاصیتیں شکل سے بآسانی حاصل ہوتی ہیں۔ اگر پ ان معیں ہو،

پ ت مماس، پ گ عماد اور ن ے پایہ سے مماس پر عمین تو

ن ے = ما جم سا = ز، پ ے = ز سس سا = س

چونکہ پ ے زنجیرہ کی قوس ا پ کے مساوی ہے، اس لئے یہ ظاہر ہے کہ
ے کا اگلا متصل مقام ے ن کے اندر ہے، دوسرے الفاظ میں ے ن
ے کے طریق کا مماس ہے۔ اس لئے اس طریق یا منحنی کی خصوصیت یہ ہے کہ ۲۹۲
اس کا مماس ے ن مستقل ہوتا ہے۔ اس منحنی کو خط جرّی کہتے ہیں۔
اور وہ اسلئے کہ یہ ایک وزنی ذرہ کا راستہ یا لوکس ہے جسکو رسی کے ذریعہ ایک کھردرے
افقی مستوی پر گھسیٹا جائے جبکہ اسی کا دوسرا سرا ایک خط مستقیم (۷۹) میں مرتسم کرے۔



شکل (۷۷)

منحنی کے نقطہ ا پر ایک قرن ہے اور محور لا اس کا متقارب ہے۔
اِس منحنی کی اور خاصیتیں اِس کے مماس کے (طول میں) مستقل ہونے کی بنا پر حاصل ہو سکتی ہیں۔ مثلاً چونکہ اِس کے دو متصل مماس ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ صف سا بناتے ہیں اِس لئے مماس جو رقبہ عبور کرتا ہے وہ اس تکملہ

$\frac{1}{2}\int$ اُ ف سا سے حاصل ہوتا ہے جبکہ اسے مناسب حدود کے درمیان

لیا جائے۔ اِس طرح منحنی اور متقارب کے درمیان کا کل رقبہ $\frac{1}{2}$ ط اُ کے مساوی ہے۔

۱۲۱۔ لیسازو کے منحنی (Lissajous' Curves)

۔ یہ منحنی علم آواز میں خاص اہمیت رکھتے ہیں اور دو سادہ موسیقی حرکتوں کے ترکیب دینے سے، جو علی القوائم سمتوں میں ہوں یہ منحنی پیدا ہوتے ہیں۔ انہیں اسطرح تعبیر کیا جا سکتا ہے

لا = ا جم (ن ت + سہ)، ما = ب جم (نَ ت + صہ) ...(۱)

نیز یہ ظاہر ہے کہ مقداروں صہ، صہَ میں سے ایک کو کوئی مناسب قیمت دیدی جا سکتی ہے، کیونکہ اِس کے معنے یہ ہیں کہ وقت کے مبدأ کا خاص انتخاب کیا گیا ہے۔

جس صورت میں دور $\frac{2ط}{ن}$، $\frac{2ط}{نَ}$ متوافق ہوں تو ت کے اسقاط سے

لا، ما میں جبریہ ربط مل سکتا ہے۔

مثال ۱۔ جس صورت میں ن = نَ تو ہم لکھ سکتے ہیں

لا = ا جم (ن ت + صہ)، ما = ب جم ن ت ...... (۲)

جس سے $\frac{لا}{ا}$ - $\frac{ما}{ب}$ جم صہ = - جب ن ت جب صہ،

$\frac{ما}{ب}$ جب صہ = جم ن ت جب صہ

مربع اٹھانے اور جمع کرنے سے ملتا ہے

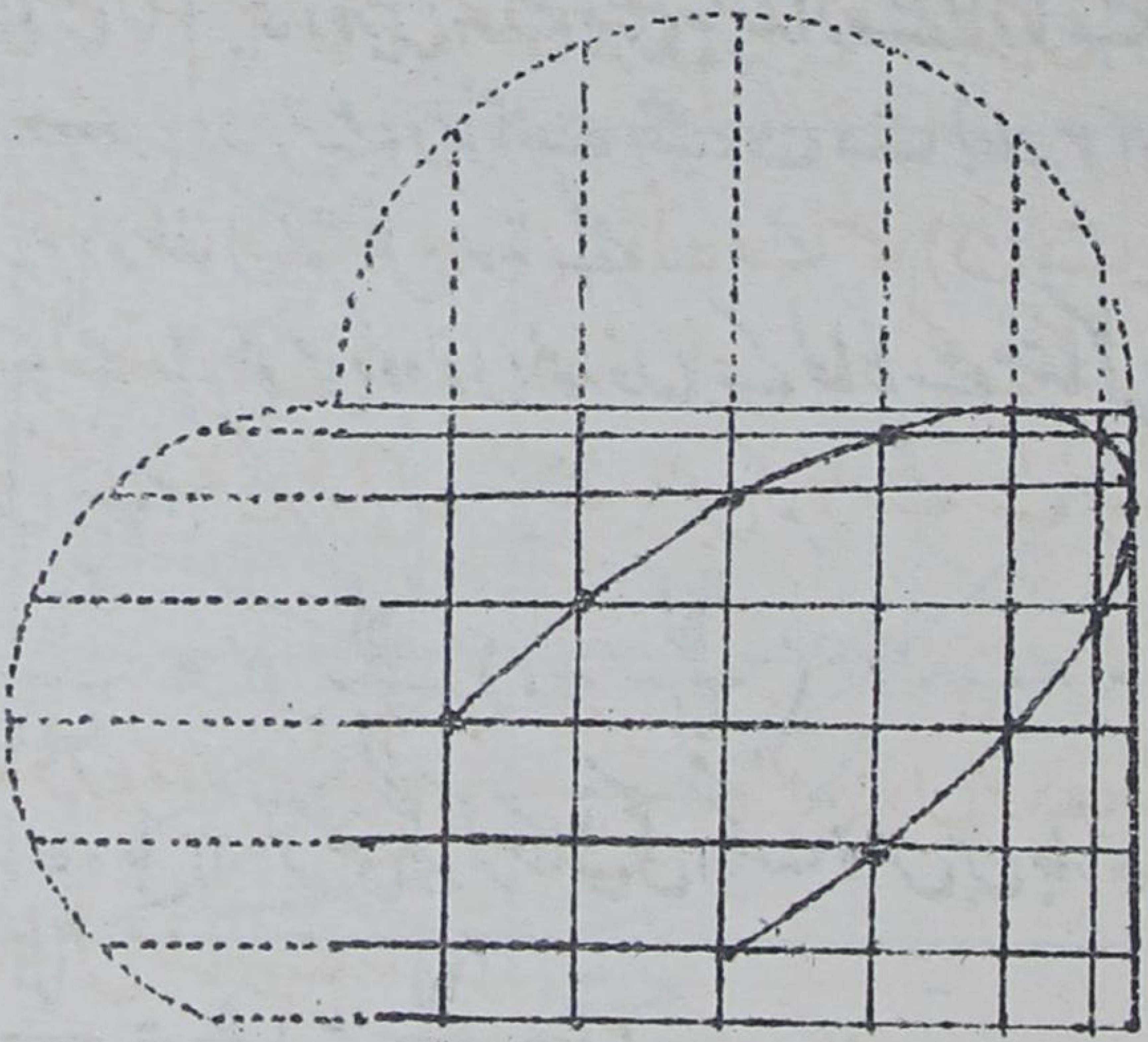
$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{2\,\text{لا}\,\text{حا}}{\text{ا}\,\text{ب}}\ \text{جم صہ} + \frac{\text{حا}^2}{\text{ب}^2} = \text{جب}^2\ \text{صہ} \quad \ldots\ldots (۳)$$

یہ قطع ناقص ہے۔ خاص صورت میں جبکہ صہ = ۰ یا صہ = π قطع ناقص بگڑ کر ۲۹۴
ایک خط مستقیم

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}} \pm \frac{\text{حا}}{\text{ب}} = 0 \quad \ldots\ldots (۴)$$

بن جاتا ہے۔

اگر دو ر ٹھیک طور پر مساوی نہ ہوں تو شکل مرتسمہ کو قطع ناقص خیال کیا جا سکتا ہے جو دو ترکیبی حرکتوں کی اضافی ہیئت صہ کے مسلسل بدلنے سے بتدریج اپنی شکل بدلتا ہے۔



شکل (۷۸)

جب قطع ناقص (۲) کو اسکے صدری محوروں کی طرف منسوب کیا جاتا ہے تو متحرک نقطہ کے محدد یہ شکل اختیار کرتے ہیں

لا = ا جم (ن ت + صہ)، ما = ب جب (ن ت + صہ) ... (۵)

ن ت + صہ کی تطبیق ہم "خروج المرکز زاویہ" کے ساتھ کرتے ہیں اور چونکہ ن ت + صہ وقت کے ساتھ یکساں طور پر بڑھتا ہے یہ ظاہر ہے کہ نقطہ (لا، ما) ایک ایسے نقطہ کے قائم ظل کی طرح حرکت کرتا ہے جو نیم قطر ا کا دائرہ مستقل رفتار ن ا کے ساتھ مرتسم کرے۔ چونکہ دائرہ سے ناقص میں بدلنے کے لئے کوئی لا انتہا ہی چھوٹا فراز ائی نسبت سے بدلتا ہے جس نسبت سے کہ متوازی نیم قطر، اسلئے معلوم ہوتا ہے کہ ناقصی حرکت میں کسی نقطہ پ پر کی رفتار ن × ج د ہوگی جہاں ج د، ج پ کا مزدوج نیم قطر ہے اور ج مرکز ہے۔

اِس کو "ناقصی موسیقی" کہتے ہیں۔

مثال ۲۔ اگر ںَ = ۲ ن تو لکھو

لا = ا جم ن ت، ما = ب جم (۲ ن ت + صہ) .... (۶)

اِس صورت میں ما اپنے دور میں سے دگنی تیز رفتار سے گزرتا ہے اور نقطہ (۰، ب جم صہ) دو مرتبہ عبور ہوتا ہے جیسے ن ت بقدر ۲ π کے بڑھتا ہے۔ اسلئے منحنی بالعموم دو حلقوں پر مشتمل ہوتا ہے۔

جبکہ صہ = ± π/۲ تو منحنی دونوں محوروں کے لحاظ سے متشاکل ہوتا ہے اور جبری مساوات یہ ہوتی ہے ۲۹۴

ما² / ب² = ۴ (لا² / ا²) (۱ − لا² / ا²) .... (۷)

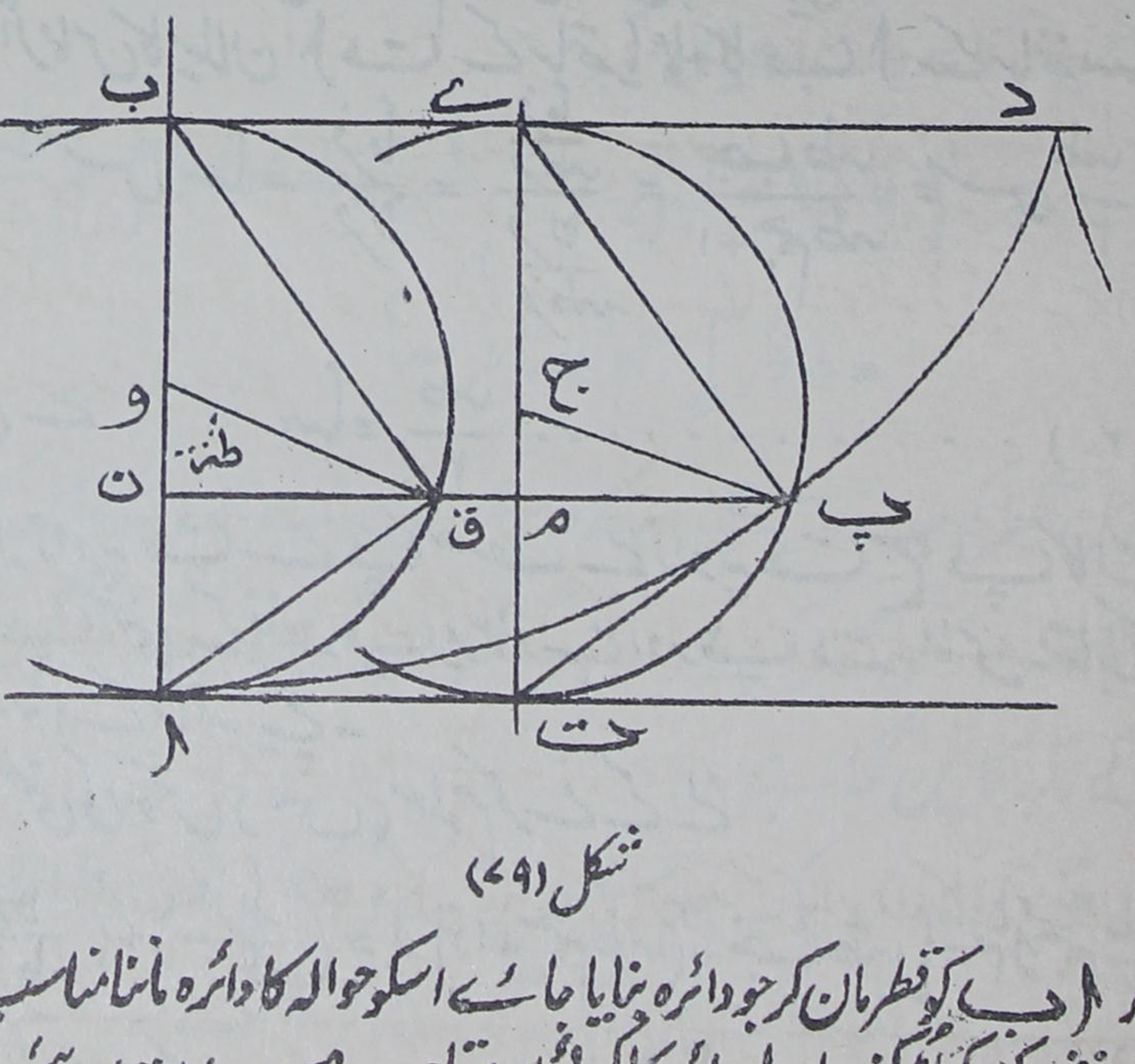
جب صہ = ۰ یا π تو منحنی بگڑ کر مکافی کی ایک قوس بن جاتا ہے

ما / ب = ± (۲ لا² / ا² − ۱) .... (۸)

جب دوروں کا باہمی ربط بالکل ٹھیک نہیں ہوتا تو منحنی اِن دو مکافی قوسوں کے درمیان بطور انتہائی شکلوں کے اہتزاز کرتا ہے۔*

* شکل ۱۰۲ میں لیسا ژو کے منحنی بنانے کے طریقہ کی نشان دہی کی گئی ہے۔ اِس میں انتصابی اور افقی خطوط ہیں جو مختلف معاون دائروں کے مساوی الفصل نقطوں میں سے کھینچے گئے ہیں اور اِن سے وقت کے مساوی وقفے تعبیر ہوتے ہیں۔
اِن منحنیات کو کھینچنے کی کئی مناظری اور حیلی ترکیبیں ہیں ان کے بیان اور انکے مختلف نمونوں کے متعلق تجربی علم آواز کی کتابوں کی طرف رجوع کیا جائے۔

۱۲۲ ـ **خط تدویر** ـ خط تدویر وہ منحنی ہے جو ایک دائرہ کے محیط پر کا کوئی نقطہ مرتسم کرتا ہے جبکہ دائرہ ایک ثابت خط مستقیم پر لڑھکتا ہو ـ ظاہر ہے کہ یہ منحنی بیشمار حصوں پر مشتمل ہوگا جو ایک دوسرے کے بالکل متماثل ہونگے اور جن میں سے ہر ایک حصہ دائرہ کے ایک پورے دور کو تعبیر کریگا ـ شکل ذیل میں ا جیسے نقطے جہاں منحنی ثابت خط مستقیم یا قاعدہ ب د سے دور سے دور ہے رأس کہلاتے ہیں، متواتر راسوں کے درمیان کے نقاط جیسے د جہاں منحنی قاعدہ سے ملتا ہے "قرن" (Cusp) کہلاتے ہیں، خط ا ب کو جو ایک رأس میں سے گذرتا ہے اور قاعدہ پر عمود وار ہے منحنی کا محور کہتے ہیں ـ ظاہر ہے کہ یہ خط تماثل کا محور ہے ـ



شکل (۷۹)

۲۹۵ محور ا ب کو قطر مان کر جو دائرہ بنایا جائے اسکو حوالہ کا دائرہ ماننا مناسب ہوگا فرض کرو کہ لڑھکنے والے دائرہ کا کوئی اور مقام ے پ ت ہے، قاعدہ کے ساتھ نقطۂ تماس ت ہے، مرکز ج ہے اور ے میں سے گذرنیوالے

قطر کا متقابل کا سرا ت ہے اور مرسم نقطہ کا مقام پ ہے۔ پ م ن کو قاعدہ کے متوازی کھینچو کہ یہ ت ا سے م پر، ا ب سے ن پر اور حوالہ کے دائرہ سے ق پر ملے۔ اگر ا ت اور ا ب کو بالترتیب لا اور ما کے محور مانا جائے تو پ کے محدد ہونگے

لا = ن پ = ب ے + م پ، ما = ا ن = ج ت - ج م

فرض کرو کہ لڑھکنے والے دائرہ کا نیم قطر ا ہے اور طہ وہ زاویہ (پ ج ت) ہے جس میں سے یہ دائرہ گھومتا ہے جیسے مرسم نقطہ ا سے پ تک سفر کرتا ہے۔ اس طرح ب ے = ا طہ، پ م = ا جب طہ، ج م = ا جم طہ اس لئے

لا = ا (طہ + جب طہ)، ما = ا (۱ - جم طہ) ......(۱)

ان مساواتوں سے منحنی کے تمام خواص حاصل ہوتے ہیں۔

اگر مماس کا میلان ا ت کے ساتھ یا عماد کا ب ا کے ساتھ سا ہو

تو مس سا = فرما / فرلا = (فرما / فرطہ) / (فرلا / فرطہ) = جب طہ / (۱ + جم طہ) = مس طہ/۲

جس سے سا = طہ/۲ ....(۲)

چونکہ زاویہ ت ے پ نصف ہے زاویہ ت ج پ کا اسلئے ے پ منحنی کے نقطہ پ پر عماد ہے اور پ ت مماس۔ مقابلہ کرو دفعہ ۱۴۶ کے ساتھ، نیچے۔

منحنی کی قوس (س) معلوم کرنے کے لئے

(فرلا / فرطہ)^۲ + (فرما / فرطہ)^۲ = ا^۲ [(۱ + جم طہ)^۲ + جب^۲ طہ] = ۴ا^۲ جم^۲ طہ/۲

اس لئے دفعہ ۱۱۱ کی مدد سے س = ∫ ۲ا جم طہ/۲ فرطہ = ۴ا جب طہ/۲

یا سا کی رقوم میں س = ۴ا جب سا .... (۳)

کوئی مستقل جمع کرنے کی ضرورت نہیں اگر س کا مبدا ا پر لیا جائے۔

علم حرکت میں یہ رشتہ ضروری ہے۔

چونکہ تپ = ت ے جب سا اس لئے

قوس اپ = ۲ تپ = ۲ وتر اق .... (۴)

بالخصوص ایک قرن سے دوسرے قرن تک قوس کا طول ۸ ا ہے۔

اگر رکھا جائے مَا = ے م = ا (۱ + جم طہ) .... (۵)

تو منحنی اور قاعدہ کے درمیان رقبہ

= $\int$ مَا فرلا = اَ^{۲} $\int$ (۱ + جم طہ)^{۲} فرطہ = ۴اَ^{۲} $\int$ جم^{۴} $\frac{طہ}{۲}$ فرطہ

= ۸ اَ^{۲} $\int$ جم^{۴} سا فرسا

اِس تکملہ کو حدود ± $\frac{\pi}{۲}$ کے درمیان لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ رقبہ ۲۹۶

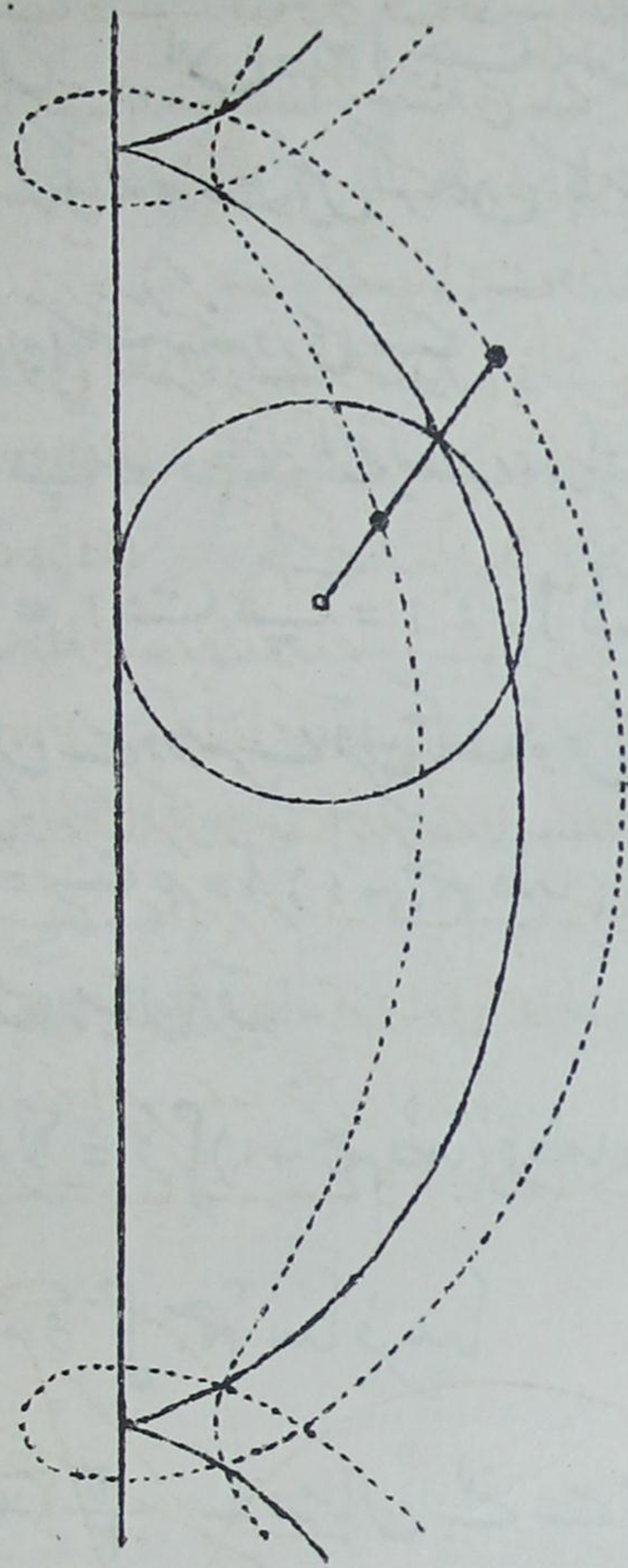
جو قاعدہ اور منحنی کے ایک محراب کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ مکون دائرہ

کے رقبہ کا تین گنا ہے۔

اگر ایک دائرہ ایک خط مستقیم پر لڑکے تو کوئی نقطہ جو بلحاظ دائرہ

کے ثابت ہو اثناء حرکت میں ایک منحنی طے کریگا جسے ہم استداری

خط یا محض استداری (Trochoid) کہینگے۔



شکل (۸۰)

شکل ۷۹ میں اگر مرسم نقطہ نیم قطر ج پ کے اندر مرکز سے فاصلہ ک پر ہو تو اس کے محدد ہونگے

ا۱ = ا طہ + ک جب طہ، ا۲ = ا - ک جم طہ ...... (۶)

جب ک > ۱ تو حلقے پیدا ہوتے ہیں جو (ک = ۱) کی خاص صورت ۲۹۷
میں بگڑ کر قرن ہو جاتے ہیں۔ جب ک < ۱ تو منحنی قاعدہ سے نہیں ملتا۔

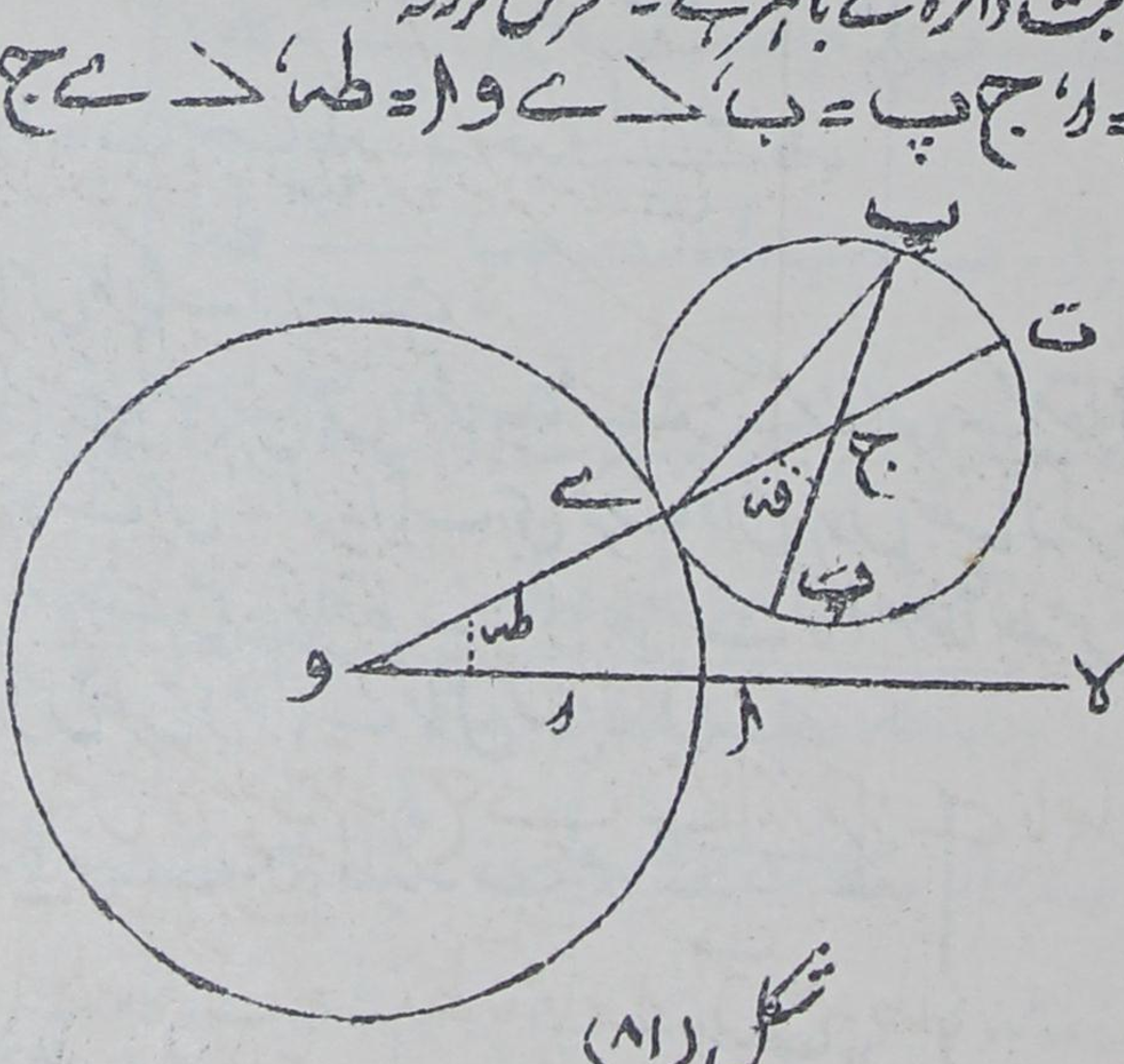
شکل ۸۰ میں صورتیں ک = $\frac{1}{2}$ ا، ک = ا، ک = $\frac{3}{2}$ ا دکھائی گئی ہیں۔

(۲) سے یہ بآسانی ثابت ہوتا ہے کہ اسندازی کے کسی نقطہ پر کا عماد لڑھکنے والے دائرہ کے نقطہ تماس کے متناظر محل میں سے گذرتا ہے۔ مقابلہ کرو دفعہ ۱۴۶ کے ساتھ

۲۳ا۔ برتدویر اور درتدویر۔ ایک ثابت دائرہ پر ایک دائرہ لڑھکتا ہے موخرالذکر کے محیط پر کا کوئی نقطہ اثنائے حرکت میں جو طریق مرتسم کرتا ہے اسے ہم برتدویر (Epicycloid) کہینگے اگر متحرک دائرہ ثابت دائرہ کے باہر واقع ہو اور درتدویر (Hypocycloid) کہینگے اگر یہ اندر واقع ہو*۔ جن برتدویروں میں لڑھکنے والا دائرہ ثابت دائرہ کے پورا گرد آجاتا ہے انہیں امتیاز کی خاطر گرد تدویر (Pericycloid) کہا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ثابت دائرہ کا مرکز و ہے اور لڑھکنے والے دائرہ کا مرکز کسی مقام میں ج ہے، نقطہ تماس ے ہے اور مرتسم نقطہ پ ہے۔ نیز فرض کرو کہ قطر پ ج پَ کا دوسرا سرا پَ ابتدا میں نقطہ ا پر تھا۔ ہم معیاری صورت وہ لینگے جس میں لڑھکنے والا دائرہ ثابت دائرہ کے باہر ہے۔ فرض کرو کہ

وا = ا، ج پ = ب، ∠ ے و ا = ط، ∠ ے ج پَ = فا



شکل (۸۱)

* پراکٹر (Proctor) نے اپنی کتاب تدویر کا رسالہ Treatise on the cycloid, etc. (1876). میں تدویر کی اس بہتر تعریف کو اختیار کیا۔

ج پ کا میلان و ا کے ساتھ طہ + فہ ہے، اگر د کو محوروں کا مبدأ اور و ا کو محور لا مانا جائے تو قائم ظل سے پ کے محدد حاصل ہوتے ہیں

لا = (ا + ب) جم طہ + ب جم (طہ + فہ)
ما = (ا + ب) جب طہ + ب جب (طہ + فہ) ......(۱)

۲۹۸ یا چونکہ ا طہ = قوس ا ے = قوس پ ے = ب فہ ......(۲)

لا = (ا + ب) جم طہ + ب جم ((ا + ب)/ب) طہ
ما = (ا + ب) جب طہ + ب جب ((ا + ب)/ب) طہ ......(۳)

نقطہ پَ جس برتدویر کو مرتسم کرتا ہے وہ دوسری رقموں کے سر و ن میں ب کی علامت بدلنے سے حاصل ہوتا ہے یعنی

لا = (ا + ب) جم طہ - ب جم ((ا + ب)/ب) طہ
ما = (ا + ب) جب طہ - ب جب ((ا + ب)/ب) طہ ......(۴)

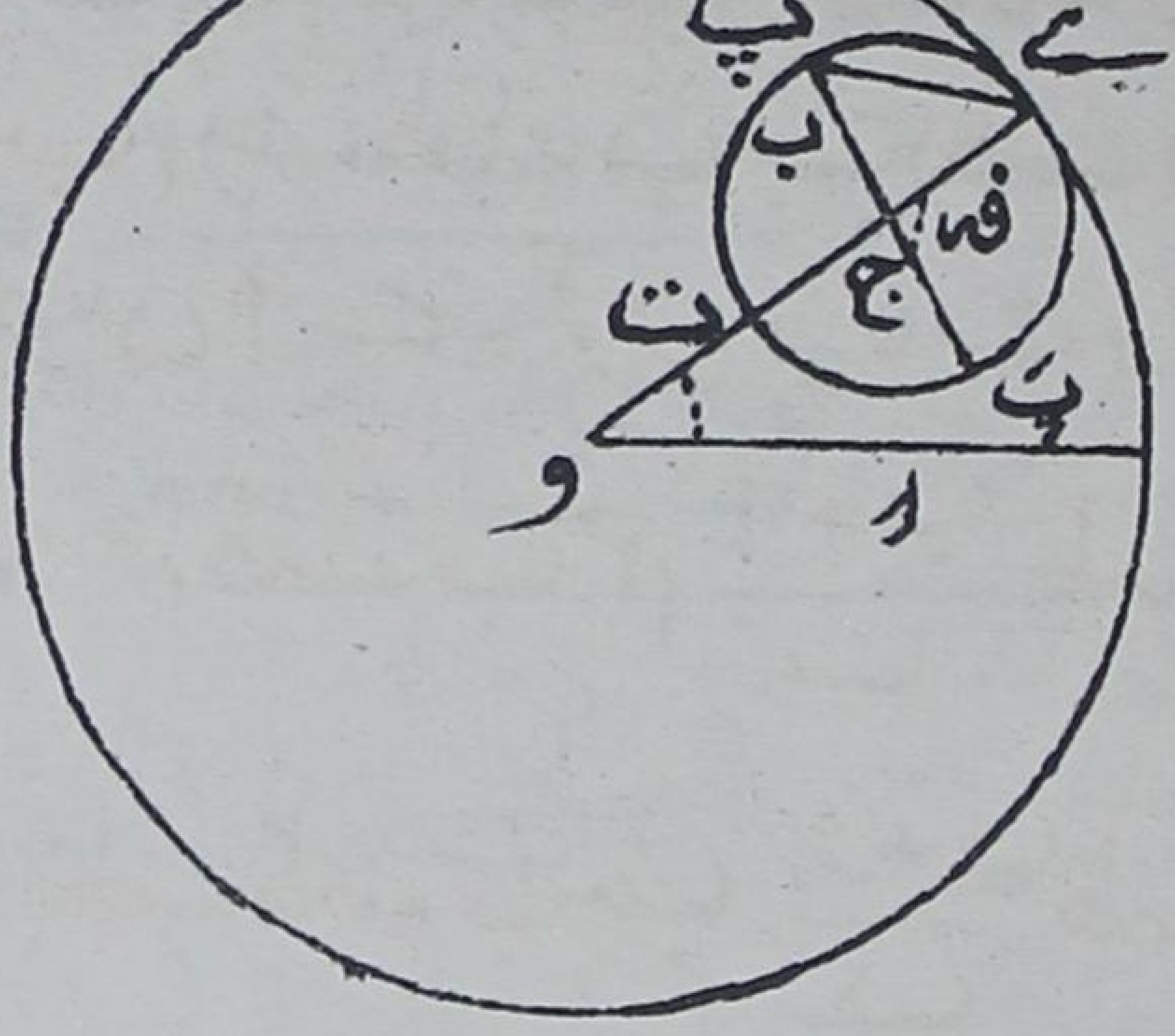
نقطہ ا پر اس کا ایک قرن ہے۔

اوپر کی مستند صورت میں دائرے ے پر کے تماس کے مقابل جانبوں میں واقع ہوتے ہیں۔ اگر یہ ایک ہی طرف واقع ہوں جیسا کہ گرد تدویر اور در تدویر کی صورت میں تو نقطہ ب کی علامت کو تمام ضابطہ میں بدل دینا چاہیئے۔ اس طرح (۳) کے مماثل ضابطہ ملتا ہے

لا = (ا - ب) جم طہ - ب جم ((ا - ب)/ب) طہ
ما = (ا - ب) جب طہ - ب جب ((ا - ب)/ب) طہ ......(۵)

اسکی تصدیق طالب علم خود کرے۔ دیکھو شکل ۸۲ ۔ در تدویر میں

ا > ب اور گرد تدویر میں ا < ب



شکل (۸۲)

اسی طرح پ کے طریق کے لئے حاصل ہوتا ہے ۲۹۹

$$\left.\begin{aligned}\text{لا} &= (\text{ا} - \text{ب})\,\text{جم}\,\text{طہ} + \text{ب}\,\text{جم}\,\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ب}}\,\text{طہ}\\ \text{ما} &= (\text{ا} - \text{ب})\,\text{جب}\,\text{طہ} - \text{ب}\,\text{جب}\,\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ب}}\,\text{طہ}\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots (۶)$$

برتدویر کے کسی نقطہ پر مماس معلوم کرنیکے لئے (۱) سے حاصل ہوتا ہے $\left[\text{چونکہ } \frac{\text{فہ}}{\text{فرطہ}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}\right]$

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{جم}\,\text{طہ} + \text{جم}\,(\text{طہ} + \text{فہ})}{\text{جب}\,\text{طہ} + \text{جب}\,(\text{طہ} + \text{فہ})} = -\text{ظم}\left(\text{طہ} + \frac{\text{فہ}}{۲}\right) \ldots (۷)$$

شکل ۸۱ کے حوالہ سے معلوم ہوگا کہ $\text{طہ} + \frac{\text{فہ}}{۲}$، ے پ کا میلان ہے و ا کے ساتھ۔ اِس لئے ے پ برتدویر کا پ پر عماد ہے۔ اسی طرح کا نتیجہ گرد تدویر اور در تدویر کے لئے مساواتوں (۵) سے حاصل ہو سکتا ہے۔ مقابلہ کرو دفعہ ۱۴۶ کے ساتھ۔

نیز (۱) سے

$$\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرفا}}\right)^{2}+\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرفا}}\right)^{2}=\frac{(\text{ا}+\text{ب})^{2}\,\text{ب}^{2}}{\text{ا}^{2}}\left(2+2\ \text{جم فا}\right)=\frac{4(\text{ا}+\text{ب})^{2}\,\text{ب}^{2}}{\text{ا}^{2}}\ \text{جم}^{2}\frac{\text{فا}}{2}$$

یا

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرفا}}=\frac{2(\text{ا}+\text{ب})\,\text{ب}}{\text{ا}}\ \text{جم}\ \frac{\text{فا}}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ (8)$$

$$\text{پس}\quad \text{س}=\frac{4(\text{ا}+\text{ب})\,\text{ب}}{\text{ا}}\ \text{جب}\ \frac{\text{فا}}{2}\ \ldots\ldots\ (9)$$

کسی مستقل کے اضافہ کی ضرورت نہیں اگر س = ۰ جبکہ فا = ۰

اگر عماد سے پ کا میلان و ا کے ساتھ سا ہو تو

$$\text{سا}=\text{طا}+\frac{\text{فا}}{2}=\frac{\text{ا}+2\text{ب}}{2\text{ا}}\ \text{فا}\ \ldots\ldots\ldots\ (10)$$

$$\text{اس لئے}\quad \text{س}=\frac{4(\text{ا}+\text{ب})\,\text{ب}}{\text{ا}}\ \text{جب}\ \frac{\text{ا}}{\text{ا}+2\text{ب}}\ \text{سا}\ \ldots\ldots\ (11)$$

ضابطہ (۹) کی ایک سادہ تعبیر ہے شکل ۱۸ سے معلوم ہوتا ہے کہ

$\text{ت پ}=2\,\text{ب جب}\ \frac{\text{فا}}{2}$ جس سے

٭

$$\text{س}=2\ \frac{\text{ا}+\text{ب}}{\text{ا}}\times\text{وتر ت پ}\ \ldots\ldots\ldots\ (12)$$

بالخصوص ایک قرن سے دوسرے قرن تک منحنی کا طول $\frac{8(\text{ا}+\text{ب})\,\text{ب}}{\text{ا}}$ ہے۔

گرد تدویر اور در تدویر کے متعلق متناظر نتائج ب کی علامت بدلنے سے بآسانی حاصل ہو سکتے ہیں۔

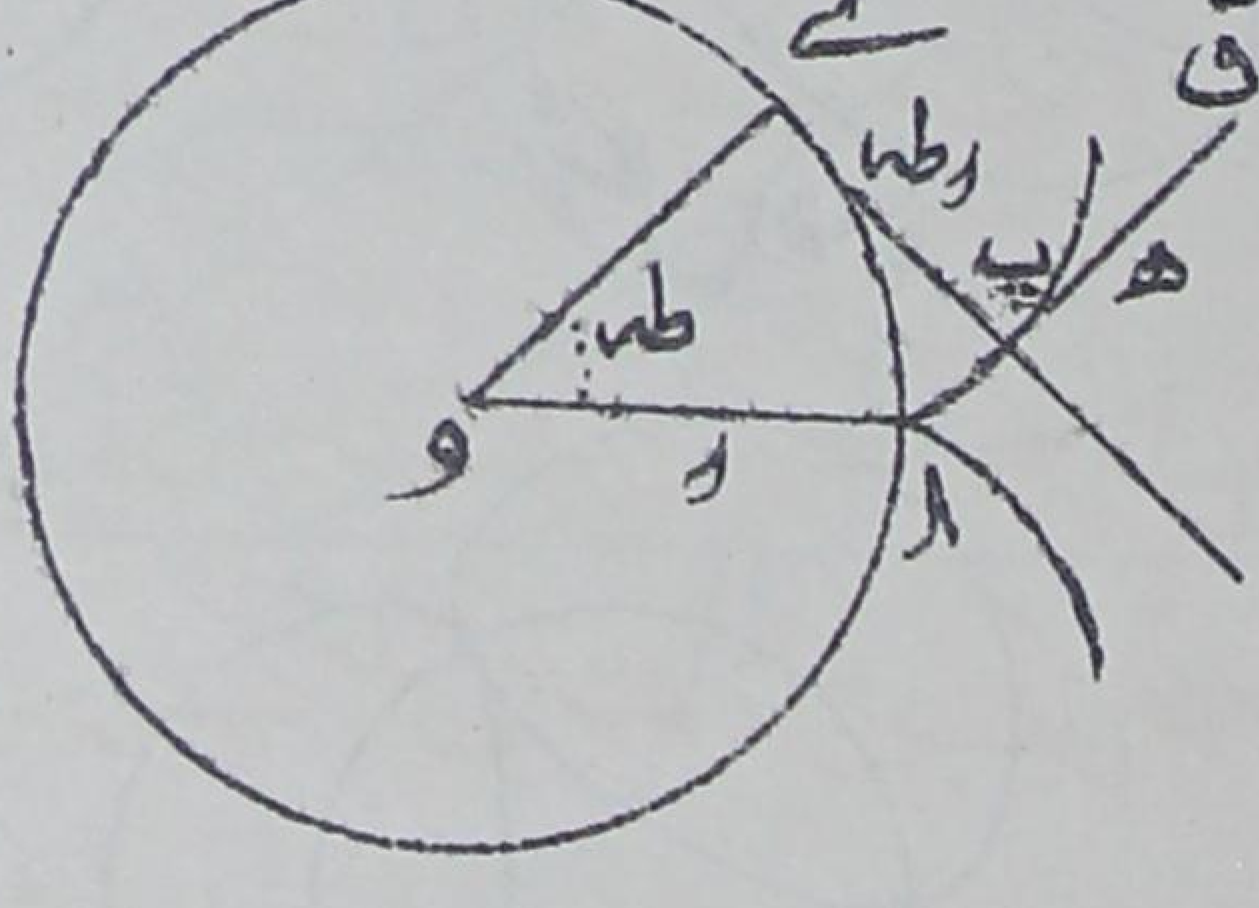
۳۰۰ جو منحنی لڑکنے والے دائرہ کا کوئی ایسا نقطہ مرتسم کریگا جو محیط پر واقع نہیں ہوتا اسے بالترتیب بر استداری (Epitrochoid) یا در استداری (Hypotrochoid)

٭ نیوٹن کا (Principia, lib. i) مسئلہ ۴۹۔

خط کہا جائیگا بموجب اسکے کہ نقطہ باہر ہو یا اندر۔ اگر مرتسم نقطہ کا فاصلہ لڑھکنے والے دائرہ کے مرکز سے ک ہو تو مختلف صورتوں میں محدود لا، ما کے لئے جملے دوسری رقوم کے (صرف) سروں میں ب کی بجائے ک لکھنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۲۴۔ خاص صورتیں۔ (۱) اگر ثابت دائرہ کا نیم قطر لا انتہا بڑا ہو تو واپس تدویر کی صورت پر ہم آجاتے ہیں۔ دفعہ ۱۲۳ (۱) سے متناظر مساواتیں باسانی حاصل ہوتی ہیں اگر لا کی بجائے لا + ا اور ا طہ = ب فہ اور (آخر الامر) طہ = ۰ لکھا جائے۔

(۲) اس کے بعد لڑھکنے والے دائرہ کے نیم قطر کو لا انتہا بڑا بنانے سے ایک ایسے خط مستقیم کے کسی نقطہ کا طریق ملتا ہے جو ایک ثابت دائرہ پر لڑھکتا ہے اس تعریف کے مطابق جو منحنی ملتا ہے اسے ہم دائرہ کا دو پیچہ (Involute) کہینگے۔ دیکھو دفعہ ۱۴۴۔ اسکی مساواتیں دفعہ ۱۲۳ (۲) کی انتہائی صورت کے طور پر معلوم ہو سکتی ہیں یا بلا واسطہ شکل سے فوراً لکھی جاسکتی ہیں۔



شکل (۸۳)

ہمیں شکل سے یہ حاصل ہوتا ہے

لا = ا جم طہ + ا طہ جب طہ
ما = ا جب طہ − ا طہ جم طہ .... (۱)

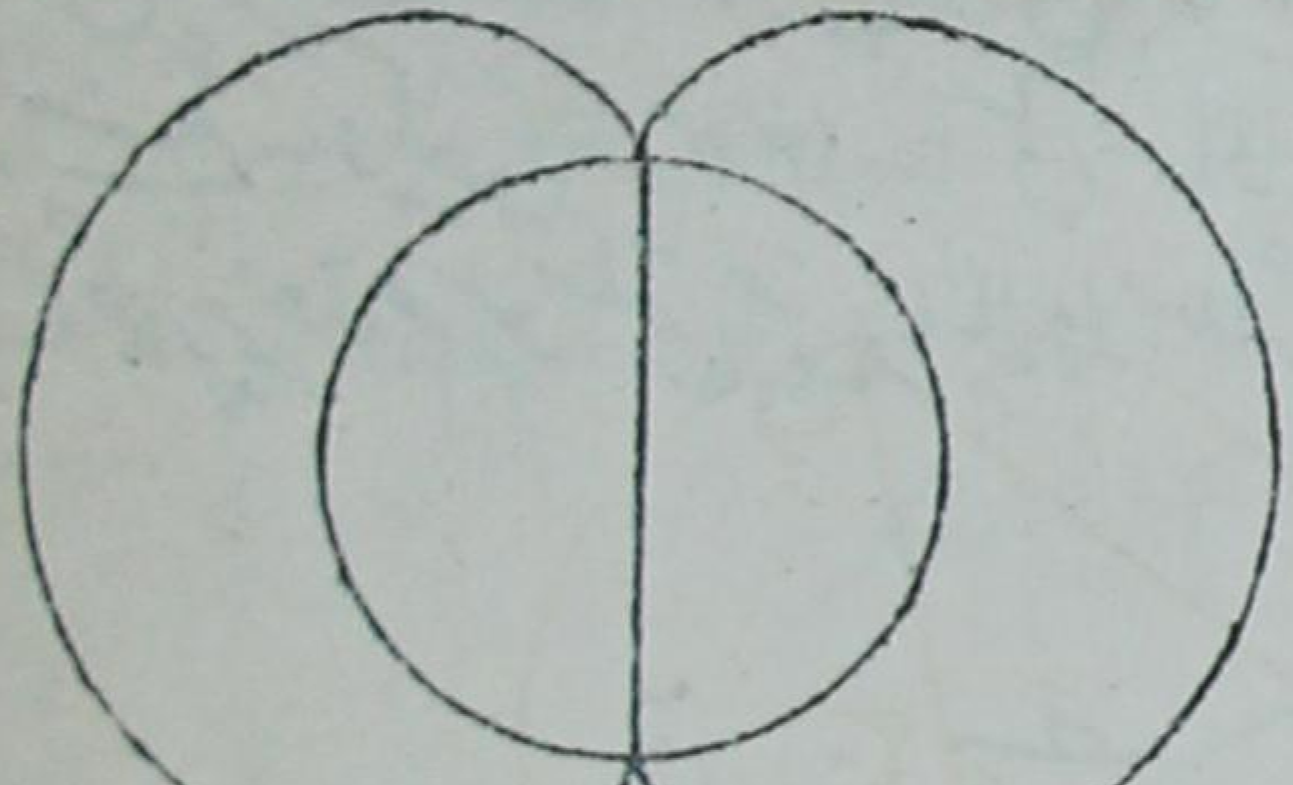
اِس کے متناظر استداری منحنی ہے

لا = (ا+ھ) جم طھ + اطھ جب طھ
ما = (ا+ھ) جب طھ + اطھ جم طھ .... (۲)

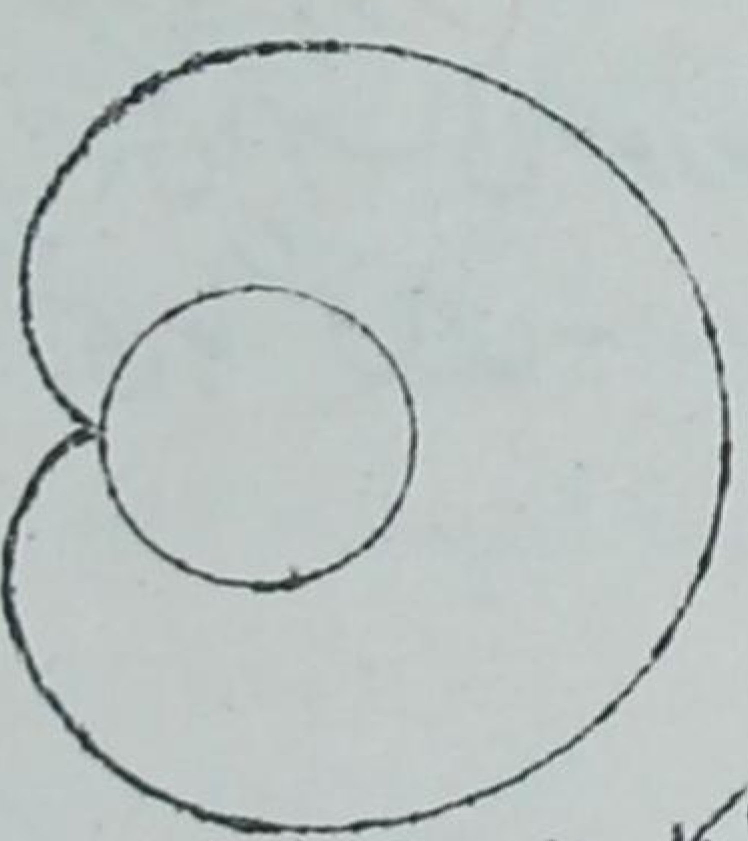
جہاں شکل میں ھ = پ ق اور ق مرسم نقطہ ہے۔ خاص صورت ھ = -ا سے ارشمیدس کا لولب حاصل ہوتا ہے دیکھو دفعہ ۱۲۶ -

(۳) اگر نیم قطر ا، ب متوافق ہوں تو گردشوں کی کسی پوری .. تعداد کے بعد مرسم نقطہ اپنے ابتدائی مقام پر واپس آئیگا اور اس کے بعد اس کا راستہ اس کے پرانے طریق پر منطبق ہوگا۔ ایسی صورت میں منحنی جبریہ ہوتا ہے کیونکہ لا، ما کے لئے جو جملے حاصل ہوتے ہیں ان سے مثلثی تفاعل ساقط ہو سکتے ہیں۔ بعض صورتوں میں مساوات کی قطبی شکل زیادہ سہولت بخش ہوتی ہے۔

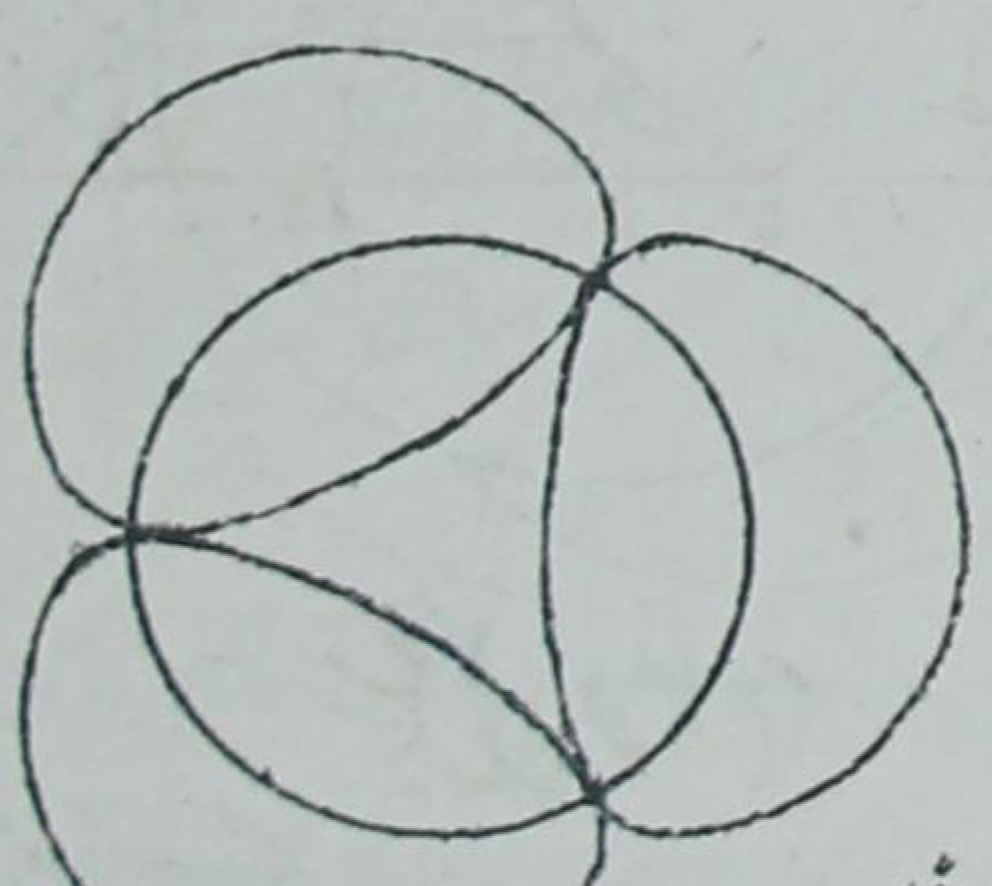
۳۰۱



شکل (۸۵)



شکل (۸۴)



شکل (۸۶)

اشکال ۸۴، ۸۵، ۸۶ میں "بر" اور "مدور" تدویریں دکھائی گئی ہیں جن میں لڑکنے والے

دائرہ کا نیم قطر ثابت دائرہ کے نیم قطر کے ساتھ بالترتیب نسبت ۱، $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$ رکھتا ہے۔ ایک دو صورتیں خاص طور پر مشہور خاصیتیں رکھتی ہیں، اِن کا ہم تفصیلی معائنہ کرتے ہیں۔

مثال ۱۔ خط صنوبری (Cardioid)۔

اگر دفعہ ۱۲۳ (۳) میں ب = ا رکھا جائے تو حاصل ہوتا ہے

لا = ۲ ا جم طہ + ا جم ۲ طہ، ما = ۲ ا جب طہ + ا جب ۲ طہ

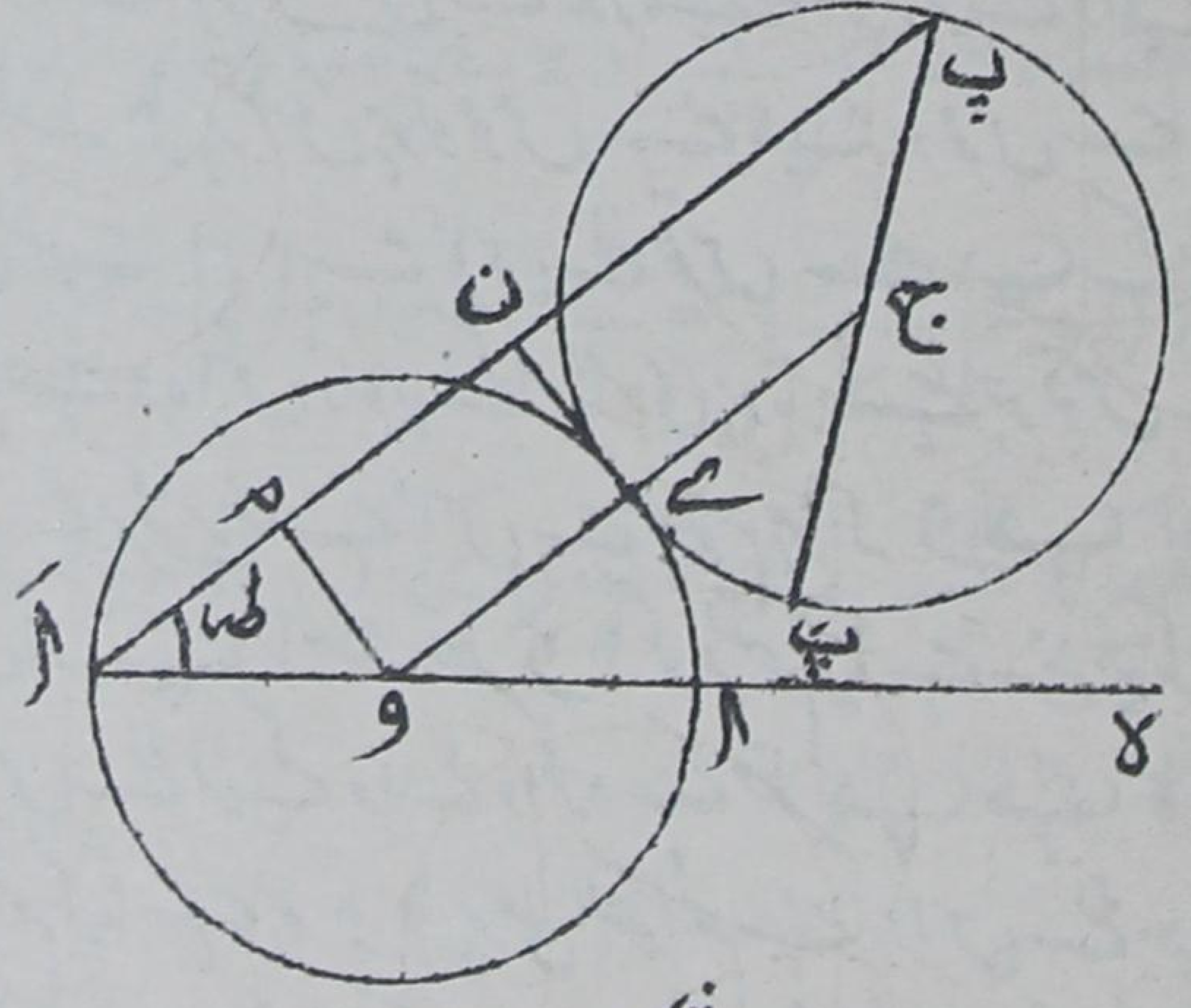
جس سے لا + ا = ۲ ا (۱ + جم طہ) جم طہ، ما = ۲ ا (۱ + جم طہ) جب طہ ..... (۳)

اِس سے معلوم ہوتا ہے کہ نقطہ (- ا، ۰) کو قطب مان کر جو سمتی نیم قطر کھینچا جائے وہ اِس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

ر = ۲ ا (۱ + جم طہ) .... (۴)

یہ اور طرح سے بھی شکل ۸۷ سے ظاہر ہے جہاں

اَپ = ۲ اَن = ۲ (وے + اَم)



شکل (۸۷)

متناظر استداری خط اِن مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں

لا = ۲ ا جم طہ + ک جم ۲ طہ، ما = ۲ ا جب طہ + ک جب ۲ طہ

۳۰۲ نقطہ (ر ـ ک ، ۰) کو قطب ماننے سے یہ ضابطے اِس مساوات کے معادل ہیں

ر = ۲ (ا + ک جم طہ) .... (۵)

جو گھونگا منحنی (Limaçon) کی قطبی مساوات ہے (دفعہ ۱۲۷)۔ یہ مساوات بھی باآسانی ہندسی طریق پر حاصل ہوسکتی ہے۔

مثال ۲۔ ایک دائرہ ، اپنے سے دُگنے نصف قطر والے دائرہ کے اندر لڑکتا ہے۔

۱۲۳ (۶) میں رکھو ب = ½ ا تو حاصل ہوگا

لا = ا جم طہ ، ما = ... (۶)

یعنی لڑکنے والے دائرہ کے محیط پر کا مرسم نقطہ ثابت دائرہ کا ایک قطر مرتسم کرتا ہے۔

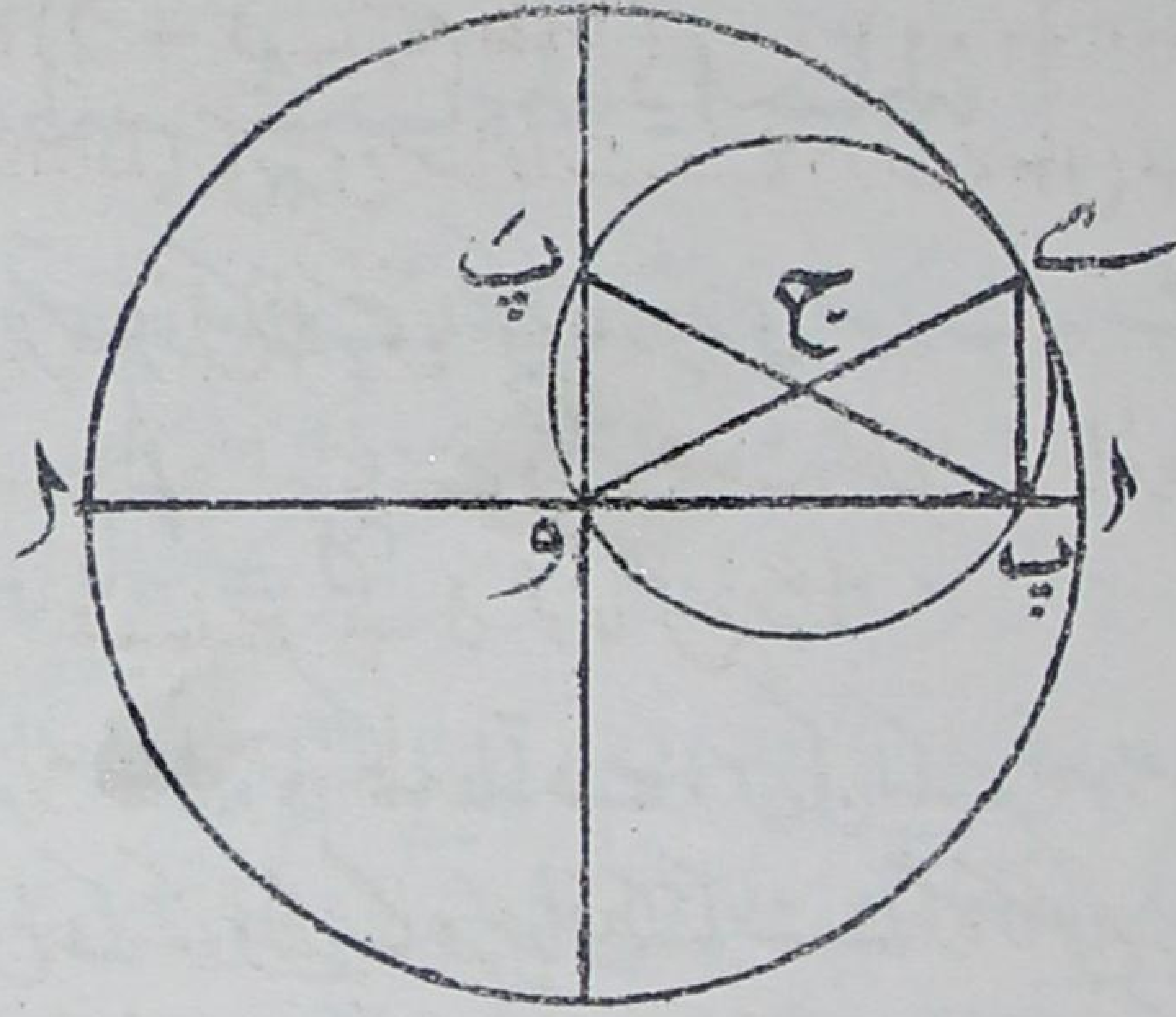
نیز متناظر استداری منحنی اِن مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

لا = (ب + ک) جم طہ ، ما = (ب ـ ک) جب طہ ..... (۷)

اور یہ قطع ناقص ہے جس کے نیم محور ب ± ک ہیں۔ نیز اگر لڑکنے والے دائرہ کی زاوی رفتار مستقل ہو تو مرسم نقطہ کی حرکت ناقصی موسیقی ہوگی۔

ہندسی تخیلات کی بناء پر بھی یہ نتائج باآسانی حاصل ہوتے ہیں۔ لڑکنے والا دائرہ ہمیشہ ثابت دائرہ کے مرکز و میں سے گذرتا ہے اور اگر لڑکنے والے دائرہ کا نقطہ پ ابتدا میں نقطہ ا پر منطبق ہو تو قوس ے پ = قوس ے ا۔ اب چونکہ نصف قطروں کی باہمی نسبت ۱ : ۲ ہے، اِس لئے قوس ے پ کے سامنے اِس کے محیط پر جو زاویہ بنتا ہے وہ اُس زاویہ کے مساوی ہونا چاہئے جو قوس ے ا کے سامنے اسکے اپنے دائرہ کے مرکز پر بنتا ہے ، اس سے معلوم ہوا کہ و پ اور و ا سمت میں منطبق ہوتے ہیں اور پ ثابت قطر و ا کو مرتسم کرتا ہے۔ نیز چونکہ زاویہ پ و پَ زاویہ قائمہ ہے اس لئے لڑکنے والے دائرہ کے قطر پ پَ کا دوسرا سرا ثابت دائرہ کا وہ قطر مرتسم کرتا ہے جو و ا پر علی القوائم ہے۔ اس لئے پ پَ مستقل

۳۰۳ طول کا ایک خط مستقیم ہے جس کے سرے دو علی القوائم خطوط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں جو باہم علی القوائم ہیں۔ یہ معلوم ہے کہ ان حالات کے ماتحت پ پَ پر کا کوئی اور نقطہ قطع ناقص مرتسم کرتا ہے۔ مقابلہ کرو دفعہ ۵۴ امثال اکے ساتھ۔



شکل (۸۸)

مثال ۳- ایک دائرہ ایک ایسے ثابت دائرہ کے باہر لڑکتا ہے جس کا نیم قطر اسکے نیم قطر کا نصف ہے، نیز لڑکنے والا دائرہ ثابت دائرہ کو پورا گھیر لیتا ہے۔

دفعہ ۱۲۳ کے ضابطوں (۵) سے حاصل ہوتا ہے جبکہ ب = ۲ا

$$\text{لا} = \text{۳ا جم طہ} - \text{۲ا جم}\,\frac{\text{طہ}}{۲}،\quad \text{ما} = \text{۳ا جب طہ} - \text{۲ا جب}\,\frac{\text{طہ}}{۲}$$

$$\text{یا}\quad \text{لا} - \text{ا} = -\text{۲ا}\left(۱ + \text{جم}\,\frac{\text{طہ}}{۲}\right)\text{جم}\,\frac{\text{طہ}}{۲}،\quad \text{ما} = -\text{۲ا}\left(۱ + \text{جم}\,\frac{\text{طہ}}{۲}\right)\text{جب}\,\frac{\text{طہ}}{۲} \quad \ldots(۸)$$

اگر ہم رکھیں $\text{طہ}' = \frac{\text{طہ}}{۲} + \pi$ تو ظاہر ہے کہ گردتدویر کی مساوات حسب ذیل ہوگی جبکہ اس کا قطب (ا، ۰) لیا جائے

$$\text{ر} = \text{۲ا}\,(۱ - \text{جم طہ}') \quad \ldots\ldots\ldots\ (۹)$$

اور یہ خط صنوبری ہے۔

اس نتیجہ میں اور اوپر کی مثال ۱ کے نتیجہ میں تعلق دفعہ ۱۵۰ سے معلوم ہوگا۔

مثال ۴- "چار قرنوں والا درتدویر"۔

دفعہ ۱۲۳ (۶) میں رکھو $\text{ب} = \frac{\text{ا}}{۴}$ تو حاصل ہوتا ہے

$$\left.\begin{aligned}\text{لا} &= \tfrac{۳}{۴}\,\text{ا جم طہ} + \tfrac{۱}{۴}\,\text{ا جم ۳ طہ} = \text{ا جم}^{۳}\,\text{طہ}\\ \text{ما} &= \tfrac{۳}{۴}\,\text{ا جب طہ} - \tfrac{۱}{۴}\,\text{ا جب ۳ طہ} = \text{ا جب}^{۳}\,\text{طہ}\end{aligned}\right\} \quad ......(۱۰)$$

جس سے منحنی بآسانی مرتسم ہو سکتا ہے۔ اسکی کارٹیزی صورت یہ ہے

$$\text{لا}^{\frac{۲}{۳}} + \text{ما}^{\frac{۲}{۳}} = \text{ا}^{\frac{۲}{۳}} \quad ....(۱۱)$$

بعض اوقات اس منحنی کو "ستارہ نما" کہا جاتا ہے، اس کی ایک خصوصیت یہ ہے کہ اسکے مماس کا طول جو محددوں کے محوروں کے درمیان کٹتا ہے مستقل ہوتا ہے۔ اگر شکل ۸۹ میں مرسم نقطہ پ ہو اور ت پ مماس ہو تو یہ آسانی سے دیکھا جائیگا کہ زاویہ ح ت پ زاویہ ا و ح کا دوچند ہے، اس لئے ح ک = ۲ و ت = ا
نیز دیکھو شکل ۱۲۵ دفعہ ۱۴۵۔

شکل (۸۹)

۱۲۵ – دائری حرکتوں کا ایکدوسرے پر انطباق – بردورے

تدویری اور استداری منحنی جنکا ذکر دفعات ۱۲۲ تا ۱۲۴ میں کیا گیا ہے ایک اور طرح سے بھی پیدا ہوتے ہیں یہ ایسے نقطوں کے طریق ہیں جنکی حرکت دو یکساں دائری حرکتوں سے مرکب ہو۔

ایک بازو وق ایک ثابت نقطہ و کے گرد مستقل زاوی رفتار ن کے ساتھ حرکت کرتا ہے، مبدأ و میں سے گذرنیوالے قائم محددوں پر اس کے ظل ہونگے

لا = ج جم ن ت ، ما = ج جب ن ت ....(۱)

جہاں ج = وق بشرطیکہ ت کے مبدأ کا مناسب طور پر انتخاب کیا جائے اگر ایک اور بازو وقَ نقطہ و کے گرد مستقل زاوی رفتار نَ کے ساتھ گردش کرے اور ایک ہی وقت میں وق کے ساتھ ابتدأ محور لا سے گھومنا شروع کرے تو محوروں پر وقَ کے ظل ہونگے

لا = جَ جم نَ ت ، ما = جَ جب نَ ت ....(۲)

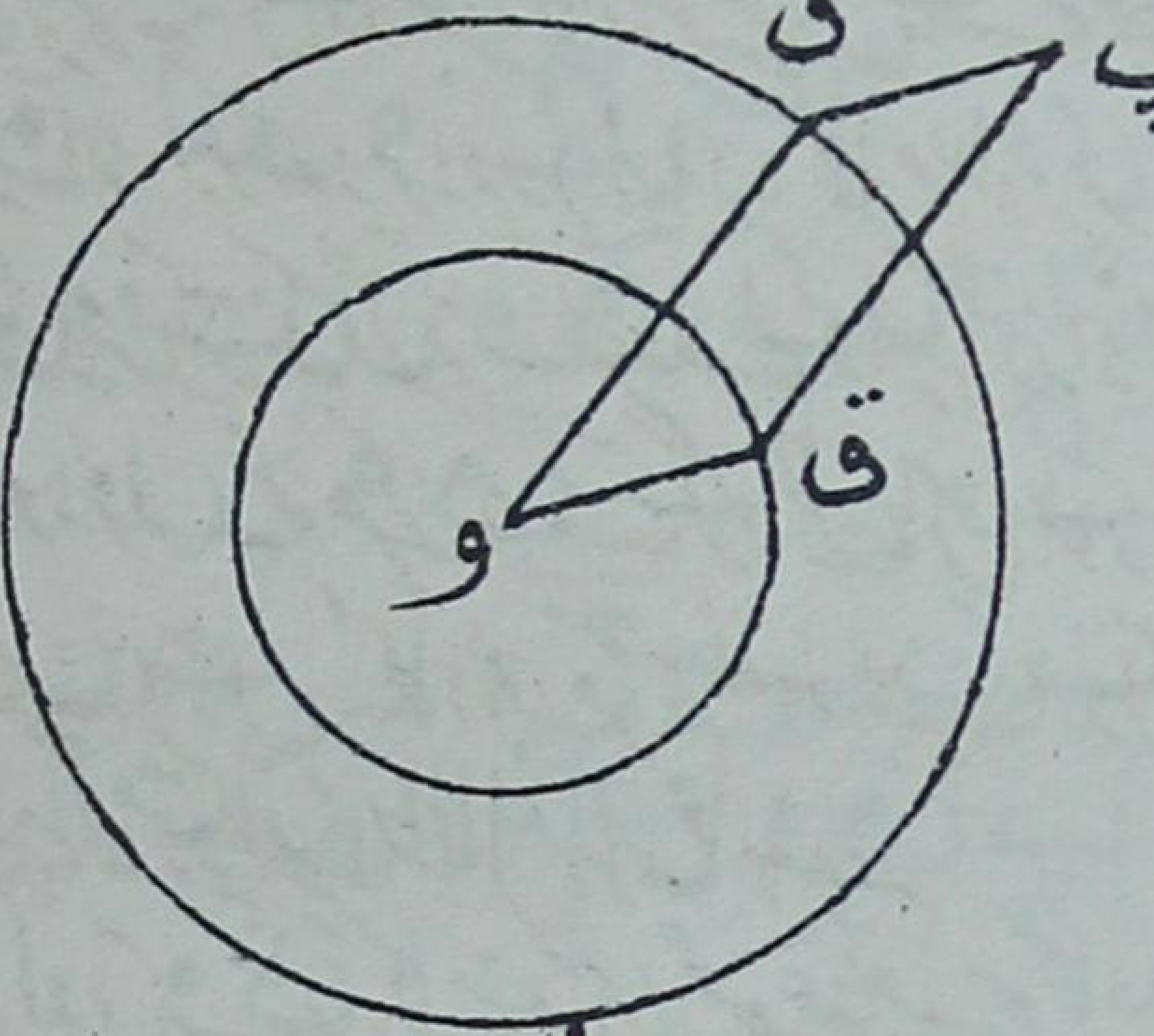
جہاں وقَ = جَ - اگر متوازی الاضلاع وق پ قَ کی تکمیل کیجائے تو وپ سے وق اور وقَ کا ہندسی مجموعہ تعبیر ہوگا اور پ کے محدد ہونگے

لا = ج جم ن ت + جَ جم نَ ت ، ما = ج جب ن ت + جَ جب نَ ت ....(۳)

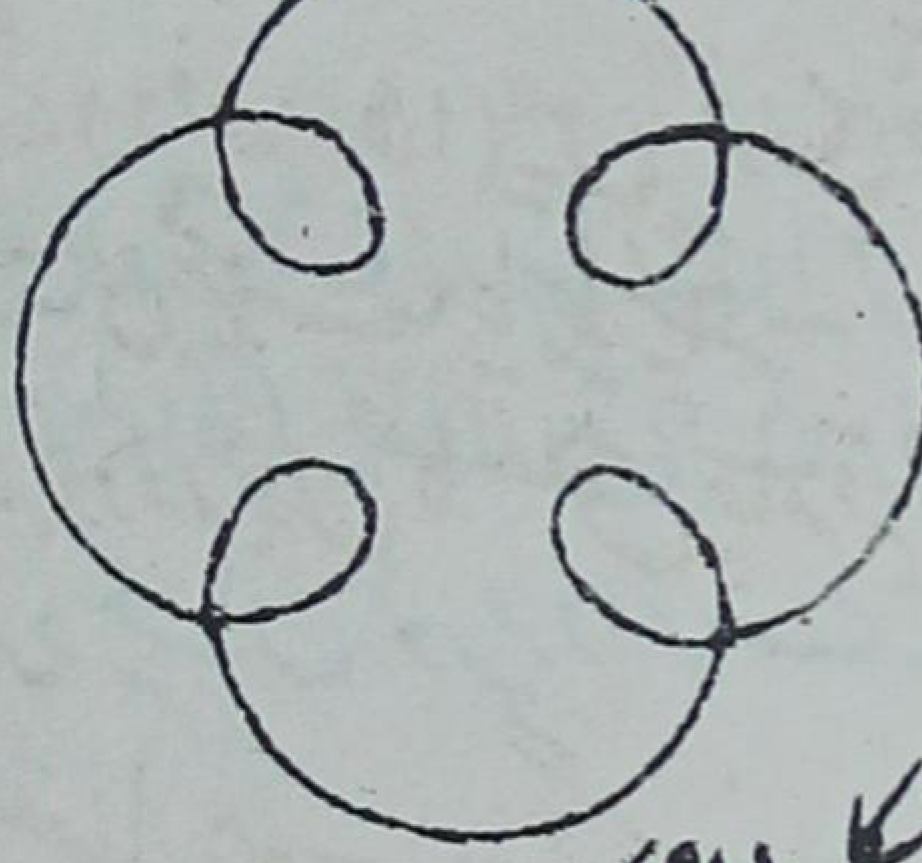
چونکہ قَ پ ہمیشہ وقَ کے مساوی اور متوازی رہتا ہے اس لئے پ کا راستہ ایک ایسے نقطہ کا طریق ہے جو بلحاظ ایک نقطہ ق کے دائری مدار مرتسم کرتا ہے جبکہ ق خود نقطہ و کے گرد یکساں طور پر دائرے میں حرکت کرتا ہے۔

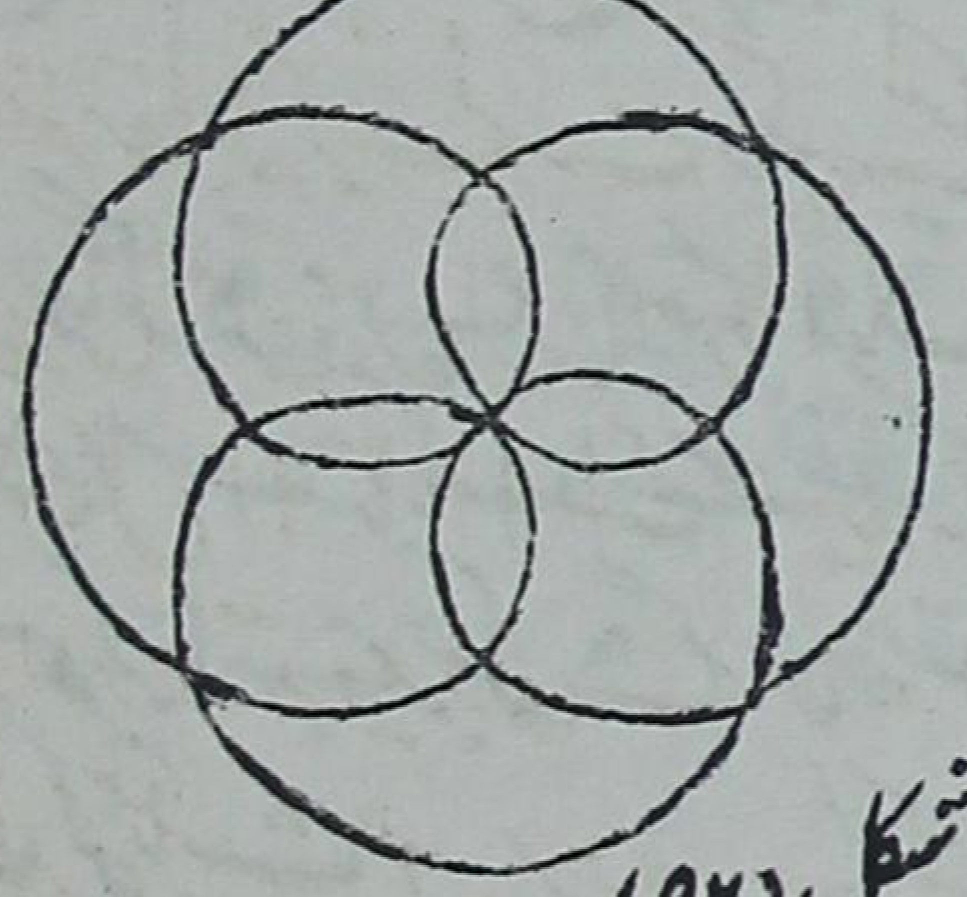
* اگر متوازی الاضلاع وق پ قَ چار ڈنڈوں کو چولوں کے ذریعہ وصل کرنے سے بنایا گیا ہو اور اگر وق، وقَ کو و کے گرد مناسب شرح سے گھمایا جائے تو و میں سے گذرنے والے کسی ثابت خط سے پ کا فاصلہ دو سادہ موسیقی حرکتوں کو تعبیر کریگا جنکے دور $\frac{2\pi}{ن}$، $\frac{2\pi}{نَ}$ ہونگے۔ لارڈ کیلون کی موج گھڑی (Tidal clock) کا یہی اصول ہے اسکی مدد سے عملی طور پر شمسی اور قمری جوار بھاٹا کا انطباق ایک دوسرے پر عمل میں آتا ہے۔

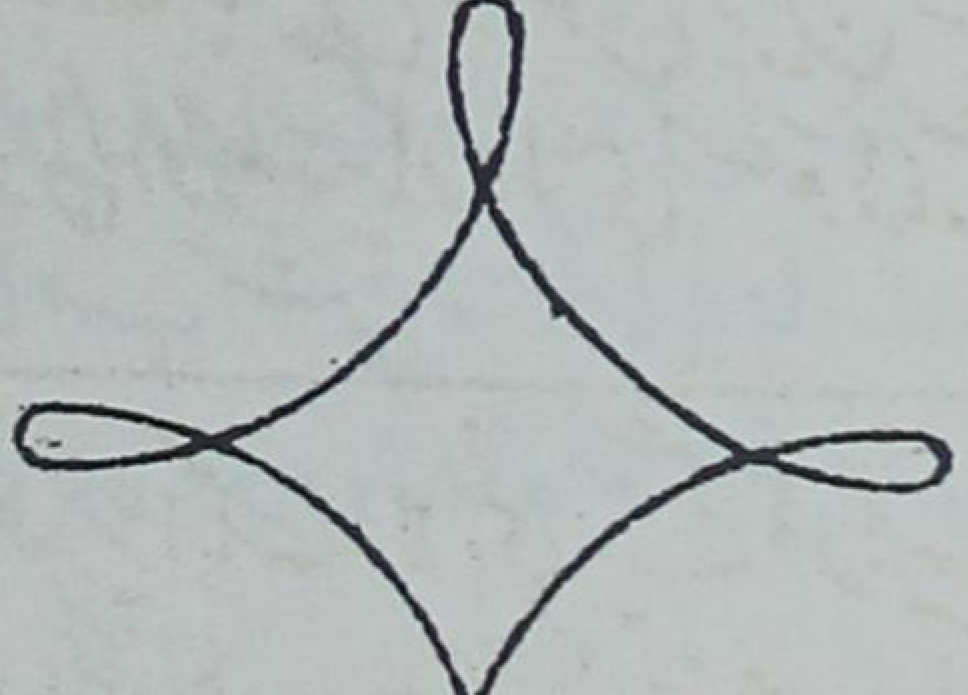
اِسس طور پر جو منحنی مرتسم کئے جاتے ہیں انہیں بر دورے (Epicycles)
کہتے ہیں ۔ اگر زاوی رفتاروں ن، نَ کی ایک ہی علامت ہو تو یہ بر دورے
"راست" کہلاتے ہیں اور اگر علامتیں مختلف ہوں تو "الٹے" یا "رجعی" ۔ ۳۰۵

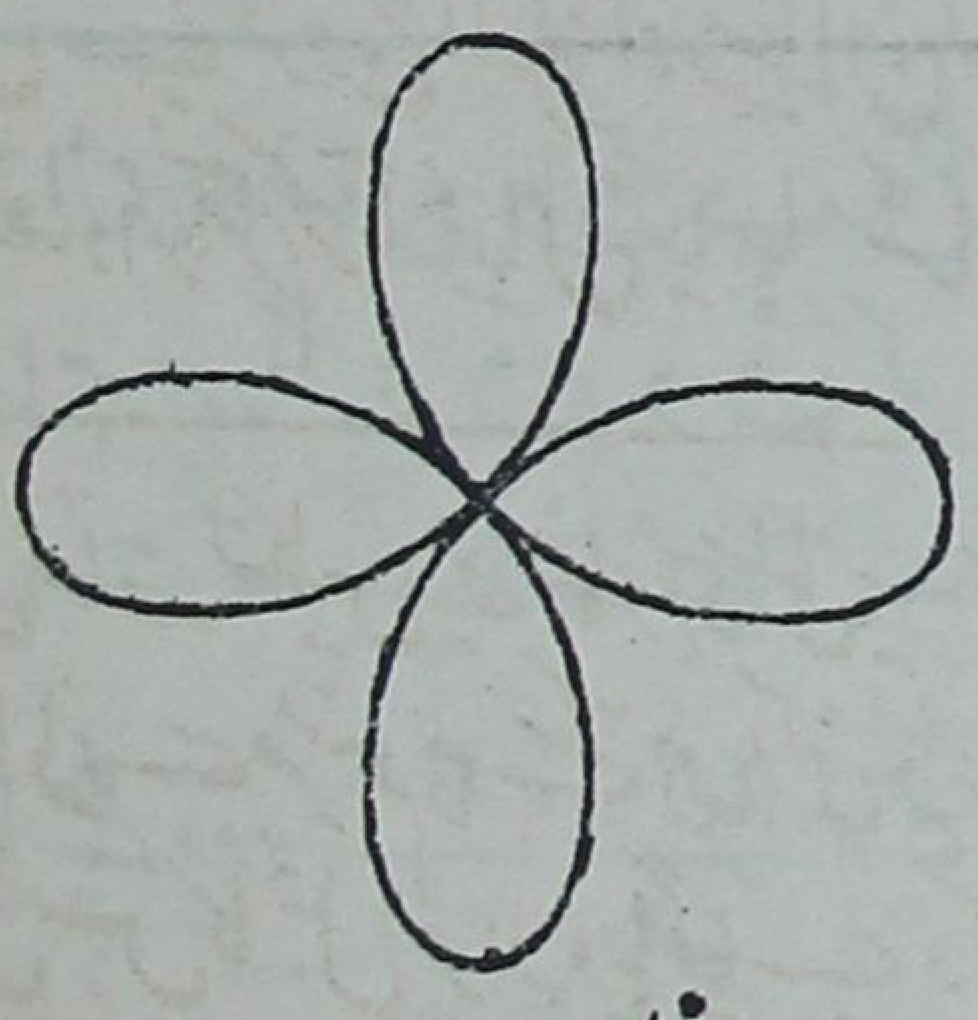


شکل (۹۰)


شکل (۹۱)


شکل (۹۲)


شکل (۹۳)


شکل (۹۴)

اشکال ۸۱ تا ۹۰ میں سیدھے اور الٹے بردوریوں کے چند نمونے دکھائے گئے ہیں*
بالکل اسی طرح سے پ کے راستہ کی یہ تعریف ہو سکتی ہے، یہ ایک ۳۰۶
نقطہ کا طریق ہے جو نقطہ ق کے لحاظ سے دائری مدار میں حرکت کرتا ہے جبکہ خود نقطہ ق، و کے گرد یکساں دائری حرکت رکھتا ہے۔ اس طرح معلوم ہوتا ہے کہ ہر بردوریہ کی دو جداگانہ طریقوں سے تکوین ہو سکتی ہے۔

یہ ظاہر ہے کہ ہر بر، اور درتدویر اور (زیادہ عام طور پر) ہر براور دراستداریہ سب کے سب بردورے ہیں کیونکہ اگر لڑھکنے والے دائرہ کی زاوی رفتار یکساں ہو تو اس کا مرکز ج، ثابت دائرہ کے مرکز و کے گرد یکساں طور پر ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے جبکہ نیم قطر ج پ جس کے اندر مرتسم نقطہ پ واقع ہے ج کے گرد یکساں گھما و رکھتا ہے۔ دیکھو اشکال ۸۱، ۸۲۔

بخلاف اس کے ہر ایک بردوریہ یا براستداریہ ہے یا دراستداریہ اور بالخصوص ہر ایک سیدھا بردوریہ براستداریہ ہے اور ہر الٹا بردوریہ دراستداریہ ہے۔ اس امر کو ہم اوپر کی مساوات (۳) کا دفعہ ۱۲۳ کے نتائج کے ساتھ مقابلہ کرنے سے دیکھ سکتے ہیں۔ آگے (دفعہ ۱۵۰) میں "فوری مرکز" کے نظریہ کی ضمن میں اس امر کا ایک سادہ ہندسی ثبوت دیا جائیگا۔

اشکال ۹۱ تا ۹۴ کے سیدھے اور الٹے بردوریوں کا تعلق چار قرنوں والی براور درتدویروں کے ساتھ واضح ہوگا۔

قدیم ہیئت میں بردورے کثرت سے استعمال ہوئے۔ اگر سیاروں کے مداروں کے خروج المرکز اور میلان نظر انداز کر دئے جائیں تو سورج زمین کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرتا خیال کیا جا سکتا ہے اور کوئی اور سیارہ اسی مستوی سطح میں

---

* ایسی مختلف شکلیں بے شمار ہو سکتی ہیں، بردورے عملی طور پر ایک لاٹھی کے ذریعہ آسانی سے مرتسم ہو سکتے ہیں، کئی دلچسپ شکلیں جو اس طور پر حاصل کی گئی ہیں پراکٹر کے رسالہ میں جس کا قبل حوالہ دیا گیا ہے دکھائی گئی ہیں، رسالہ کا صفحہ ۲۹۷ دیکھو۔

سورج کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے، اِس لئے بلحاظ زمین کے سیارہ کا مدار ایک بردوریہ ہے۔ بطلیموس کے وقت سے سولھویں صدی عیسوی تک اِس امر کے متعلق یہی نظریہ قابل قبول رہا۔ اِس کے بعد اِس منظر کے متعلق کاپرنیکی کی سادہ تشریح اور توجیہ تدریج غالب آگئی۔

سیّاروں کے اضافی مداروں میں حلقے ہیں (شکل ۹۱) جو "ساکن یا اچل نقاط" اور "رجعی حرکتوں" کا باعث ہوے ہیں۔ دراصل یہی نقاط اور الٹی حرکتیں بطلیموس کے ہاتھوں بردوریوں کی ایجاد کا باعث ہوئیں۔

برعکس اِس کے بلحاظ سورج کے جو چاند کا مدار ہے اِس میں حلقے نہیں ہیں اگرچہ یہ بردوریہ ہے، علاوہ اِس کے ہر مقام پر چاند کا مدار اندر کی طرف مقعر ہے۔

مثال ۱۔ اگر ترکیبی دائری حرکتوں کی زاوی رفتاریں مساوی اور مختلف العلامت (نَ = -ن) ہوں تو لا = (ج + جَ) جم ن ت، ما = (ج - جَ) جب ن ت ....(۴)

یعنی محصلہ حرکت ناقصی موسیقی ہے۔ خاص صورت میں جبکہ جَ = ج، ناقص بگڑ کر خط مستقیم رہ جاتا ہے۔

یہ مثال طبیعی علم مناظر میں اہمیت رکھتی ہے۔

مثال ۲۔ بردوریہ جو خاص صورت اختیار کرتا ہے جبکہ جَ = ج قابل توجہ ہے مساواتیں (۳)، ہو جاتی ہیں

$$\left.\begin{aligned} \text{لا} &= \text{۲ج جم}\left(\frac{\text{ن + نَ}}{\text{۲}}\right)\text{ت جم}\left(\frac{\text{ن - نَ}}{\text{۲}}\right)\text{ت} \\ \text{ما} &= \text{۲ج جب}\left(\frac{\text{ن + نَ}}{\text{۲}}\right)\text{ت جم}\left(\frac{\text{ن - نَ}}{\text{۲}}\right)\text{ت} \end{aligned}\right\} \text{......(۵)}$$

یا $\text{لا} = \text{ر جم طہ}$، $\text{ما} = \text{ر جب طہ}$ ....(۶)

جہاں $\text{طہ} = \frac{\text{ن + نَ}}{\text{۲}}\text{ت}$، $\text{ر} = \text{۲ج جم}\,\frac{\text{ن - نَ}}{\text{ن + نَ}}\,\text{طہ}$ ...(۷)

اس لئے منحنی کی قطبی مساوات اس شکل کی ہے

ر = رجم م طہ .... (۸)

جس میں اگر م < ۱ تو بر دور یہ راست ہے اور اگر م > ۱ تو یہ الٹا یا رجعی ہے

دفعہ ۱۲۵ کی شکلوں ۹۲، ۹۴ میں بالترتیب م = $\frac{۱}{۳}$، م = ۲

۱۲۶- قطبی محددوں کے لحاظ سے منحنی - لولبی خطوط -

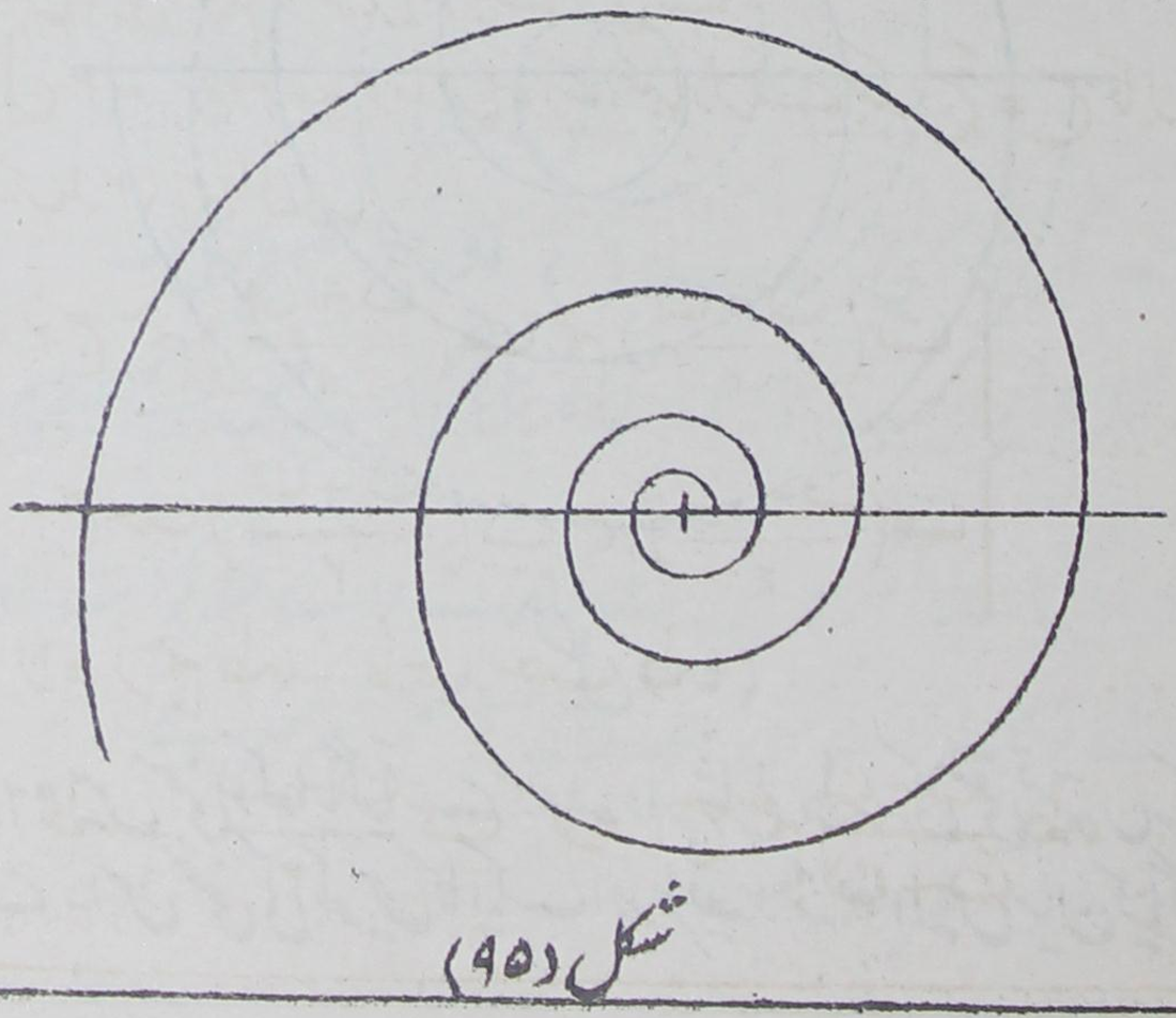
کئی دلچسپ منحنی ہیں جنکی مساواتیں قطبی محددوں میں زیادہ موزوں طور پر بیان ہو سکتی ہیں کہ پہلے ہم "لولبوں" (Spirals) کو لینگے -

(آ) "مساوی الزاویہ لولبی" یہ خاصیت رکھتا ہے کہ منحنی، ہر نقطہ پر سمتی نیم قطر کے ساتھ مستقل زاویہ بناتا ہے - اگر اس زاویہ کو عہ سے تعبیر کیا جائے تو دفعہ ۶۳ کی رو سے

$$\frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}} = \text{ر مم عہ} \quad \text{............ (۱)}$$

اس کا حل ہے (دفعہ ۳۸)

ر = ا قو$^{\text{طہ مم عہ}}$ .... (۲)



شکل (۹۵)

جیسے طہ، ‎−∞‎ سے ‎+∞‎ تک بدلتا ہے ر، صفر سے ∞ تک بدلتا ہے

شکل ۹۵۔ چونکہ دفعہ ۱۱۲ کی رو سے $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}}$ = جم عہ اس سے معلوم ہوتا ۳۰۸

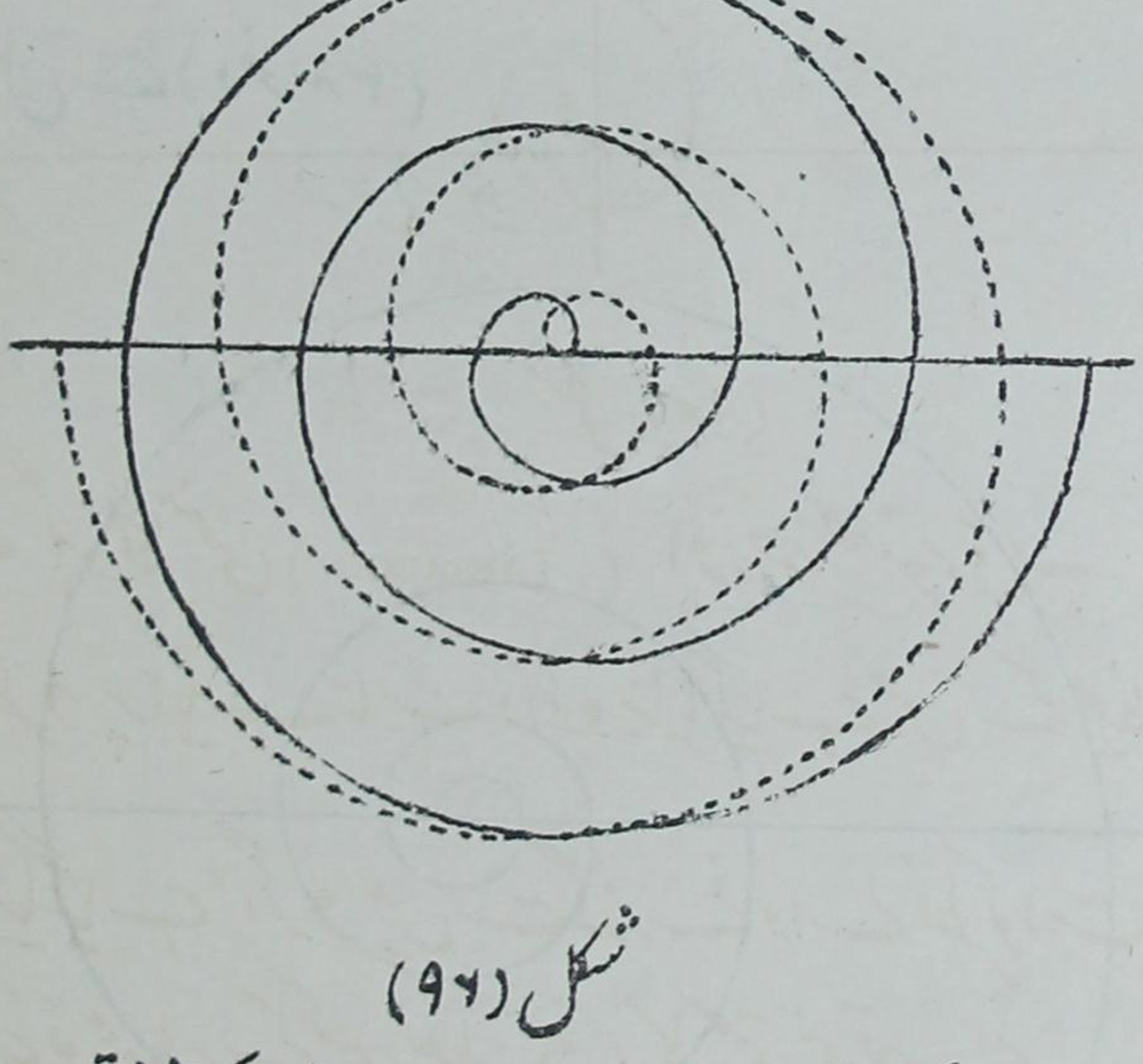
ہے کہ منحنی کا طول نیم قطروں ر۱، ر۲ کے درمیان ہے

$$\int_{\text{ر}_1}^{\text{ر}_2} \frac{\text{فر س}}{\text{فر ر}}\, \text{فر ر} = (\text{ر}_2 - \text{ر}_1)\ \text{قط عہ} \quad \ldots\ldots (3)$$

(۲) "ارشمیدس کا لولب" ایک ایسے نقطہ کی حرکت سے پیدا ہوتا ہے جو ایک خط مستقیم پر مستقل رفتار سے حرکت کرتا ہے جبکہ یہ خط مستقیم خود اپنے ایک ثابت نقطہ کے گرد یکساں زاوی رفتار سے گھومتا ہے۔

علامات میں ر = ع ت، طہ = ن ت جس سے

ر = ا طہ ...... (۴) اگر ا = $\frac{\text{ع}}{\text{ن}}$۔



شکل (۹۶)

شکل ۹۶ میں منحنی دکھایا گیا ہے، نقطہ دار شاخ طہ کی منفی قیمتوں کے جواب میں ہے۔ اس منحنی کی تکوین کا ایک اور طریقہ دفعہ ۱۲۴ میں بیان کیا گیا ہے۔

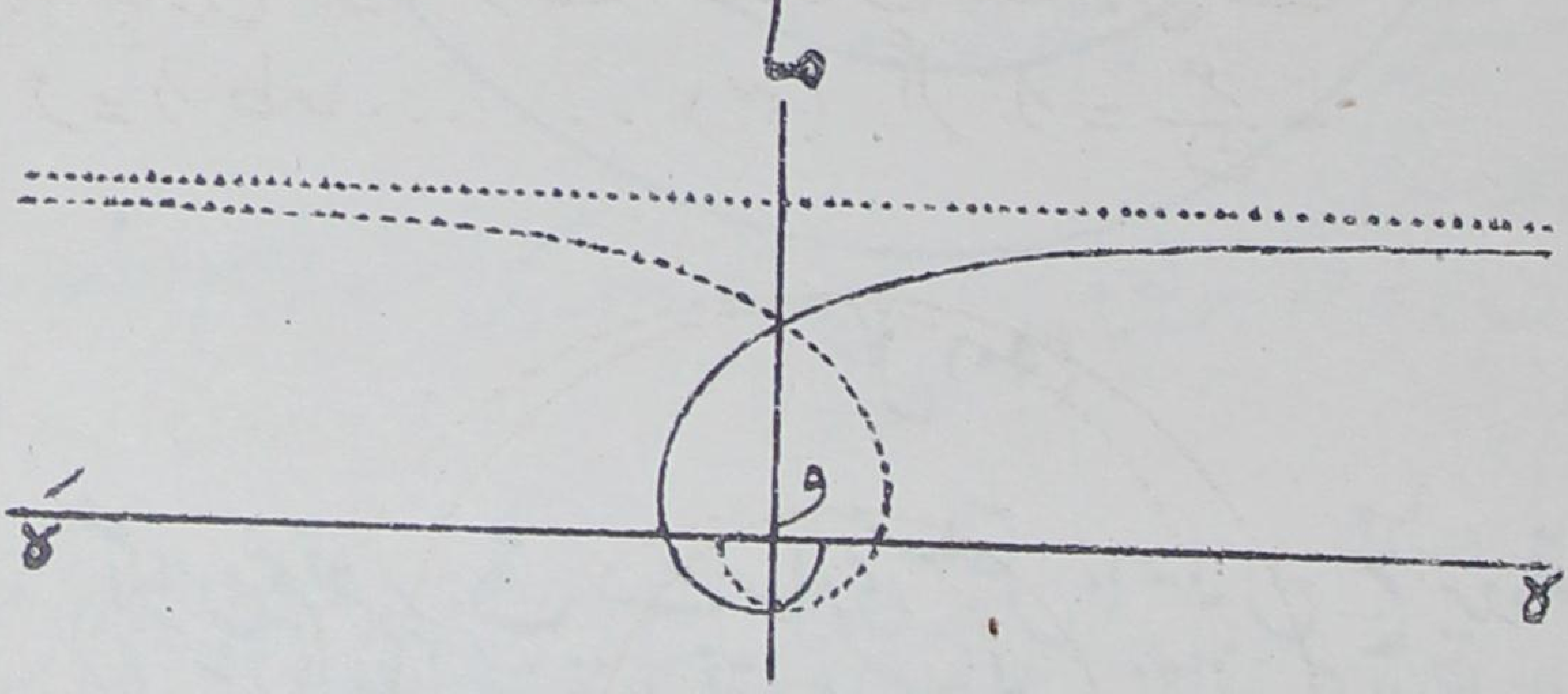
(۳) مشکانی لولب کی تعیین اس مساوات سے ہوتی ہے

ر = ۱/طہ .... (۵)

اگر ما معین ہو جو ابتدائی خط پر کھینچا گیا ہے تو

ما = رجب طہ = ۱ جب طہ/طہ

جیسے طہ صفر کے قریب پہنچتا ہے ر لامتناہی ہو جاتا ہے مگر ما محدود انتہا ۱ کی طرف مائل ہوتا ہے۔ اسلئے خط ما = ۱ متقارب ہے۔
شکل ۹۷ میں نقطہ دار منحنی طہ کی منفی قیمتوں سے متعلق ہے۔ ۳۰۹

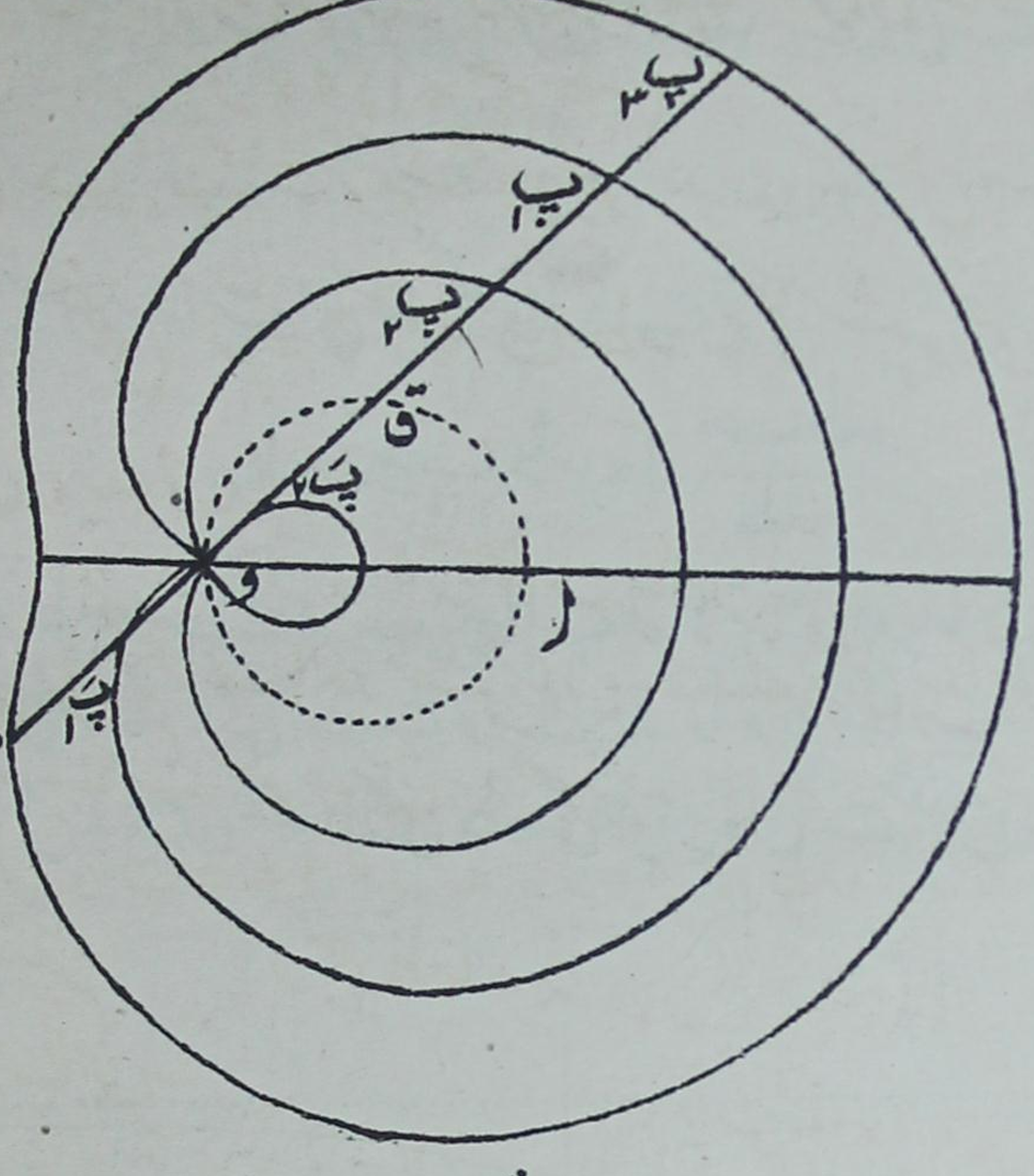


شکل (۹۷)

۱۲۷ - گھونگا منحنی (Limaçon) اور خط صنوبری -

قطر ا پر ایک ثابت دائرہ بنایا گیا ہے جس کے محیط پر ایک نقطہ و لیا گیا ہے، اگر و میں سے گذرنے والے قطر کو ابتدائی خط لیا جائے تو محیط پر کے کسی نقطہ ق کا سمتی نیم قطر ہے

ر = ا جم طہ .... (۱)



شکل (۹۸)

۲۱۰ اگر اس نیم قطر پر ق سے مساوی مستقل فاصلوں ج پر دو نقاط پ، پَ لئے جائیں تو اِن نقطوں کا طریق گھونگا منحنی کہلائیگا۔ اس کی مساوات ہوگی

ر = ا جم طہ + ج .... (۲)

اس میں ہر دو نقاط پ اور پَ کے راستے شامل ہیں جبکہ طہ، صفر سے ۲ π تک بدلتا ہے۔ اگر ج < ا تو منحنی و میں سے گزرتا ہے جبکہ طہ = جم$^{-1}$ (- $\frac{\text{ج}}{\text{ا}}$) اور اس صورت میں حلقہ پیدا ہوتا ہے شکل ۹۸ میں پ$_2$ اور پَ$_2$ سے جو منحنی مرتسم ہوتا ہے وہ دیکھو۔ اگر ج > ا تو ر صفر نہیں ہو سکتا۔ پ$_3$، پَ$_3$ کا مرتسمہ منحنی شکل میں دیکھو۔

اِس خاص صورت میں جبکہ ج = ا حلقہ بگڑ کر قرن بن جاتا ہے، اس صورت میں طریق

"قلب کی شکل کا" یا صنوبری شکل کا منحنی بن جاتا ہے، اِس کی مساوات ہے

ر = ا (۱ + جم طہ) .... (۳)

شکل میں پ، پ سے مرتسم شدہ منحنی دیکھو۔ نیز دیکھو شکل ۸۴ دفعہ ۱۲۴۔

۱۲۸۔ منحنی $ر^{ن} = ا^{ن}$ جم ن طہ۔ کئی مشہور منحنی اِس نمونہ کے اندر شامل ہوتے ہیں

$ر^{ن} = ا^{ن}$ جم ن طہ .... (۱)

ن کی مساوی مگر مختلف العلامت قیمتوں کے لئے جو منحنی پیدا ہوتے ہیں وہ ایک دوسرے کے مقلوب ہیں۔ دیکھو دفعہ ۱۳۰۔

مثلاً اگر ن = ± ۱ تو دائرہ ر = ا جم طہ .... (۲)

اور خط مستقیم ر جم طہ = ا .... (۳)

حاصل ہوتے ہیں۔

اگر ن = ± ۲ تو برنولی کا چشمہ منحنی* $ر^{۲} = ا^{۲}$ جم ۲ طہ ...(۴)

اور قائم زائد $ر^{۲}$ جم ۲ طہ = $ا^{۲}$ .... (۵)

حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات (۴) سے ر کی حقیقی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں طہ کی اُن قیمتوں کے لئے جو $\pm \frac{\pi}{۴}$ کے درمیان ہیں اور خیالی قیمتیں ملتی ہیں اِن قیمتوں کے لئے جو $\frac{\pi}{۴}$ اور $\frac{۳\pi}{۴}$ کے درمیان ہیں وغیرہ وغیرہ۔ نیز $ر^{۲}$ اعظم ہے طہ = ۰ اور طہ = π کے لئے وغیرہ۔ اِس سے معلوم ہوتا ہے کہ چشمہ منحنی دو حلقوں پر مشتمل ہے اور مبدأ پر اس کا ایک عقدہ ہے۔

اگر ن = $\pm \frac{۱}{۲}$ تو خط صنوبری $ر^{\frac{۱}{۲}} = ا^{\frac{۱}{۲}}$ جم $\frac{طہ}{۲}$ یا ر = $\frac{ا}{۲}$ (۱ + جم طہ) ...(۶)

اور مکافی $ر^{-\frac{۱}{۲}}$ جم $\frac{طہ}{۲} = ا^{-\frac{۱}{۲}}$ یا ر = $\frac{۲ا}{۱ + جم طہ}$ .... (۷)

* Lemniscate.

بالترتیب حاصل ہوتے ہیں۔

اگر (۱) کا لوگارثمی تفرق لیا جائے اور مماس اور سمتی نیم قطر کے درمیان زاویہ ۳۱۱
فہ ہو تو

$$\text{ہم فہ} = \frac{1}{\text{ر}} \frac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}} = \text{بس ن طہ} \;\ldots\ldots (۸)$$

$$\text{یا} \quad \text{فہ} = \frac{\pi}{2} + \text{ن طہ} \;\ldots\ldots\ldots (۹)$$

طالب علم اوپر کی مختلف صورتوں میں اس نتیجہ کے مفہوم کا معائنہ کرے۔

۱۲۹۔ مماسی قطبی مساوات۔ اگر کسی منحنی کے کسی مماس پر عمود ع کھینچا جائے اور نقطہ تماس کا سمتی نیم قطر ر ہو تو بالعموم ع، ر کا تفاعل ہوگا۔ جو مساوات اس تعلق کو بیان کرتی ہے اسے ہم منحنی کی "مماسی قطبی" مساوات کہینگے۔

اگر معمولی قطبی مساوات معلوم ہو تو مماسی قطبی مساوات اِن ضابطوں

$$\text{ع} = \text{رجب فہ}،\quad \frac{1}{\text{ر}} \frac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}} = \text{ہم فہ} \;\ldots\ldots (۱)$$

اور منحنی کی دی ہوئی مساوات سے طہ، فہ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگی (ضابطوں (۱) کے متعلق دیکھو دفعہ ۶۳)۔

(۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{ع}^2} = \frac{1}{\text{ر}^2}(1 + \text{ہم}^2\,\text{فہ}) = \frac{1}{\text{ر}^2} + \frac{1}{\text{ر}^4}\left(\frac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}}\right)^2 \ldots (۲)$$

بعض اوقات سمتی نیم قطر کی بجائے اس کے متکافی یا الٹ کو استعمال کرنا زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے۔ اگر لکھا جائے

$$\text{ع} = \frac{1}{\text{ر}} \quad \text{تو} \quad \frac{\text{فرع}}{\text{فرطہ}} = -\frac{1}{\text{ر}^2} \frac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}} \;\ldots\ldots\ldots (۳)$$

اور ضابطہ (۲) ہو جاتا ہے

$$\frac{1}{ع^2} = ع'^2 + \left(\frac{فرع}{فرطہ}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

حرکیات میں استعمال کرنے کے نقطہ نظر سے یہ دیکھنا ضروری ہے کہ اگر منحنی کی ماسی قطبی مساوات دی گئی ہو مثلاً

$$ع = ف(ر) \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

تو منحنی قابل تعیین ہے سوائے بلحاظ تشریق کے کیونکہ

$$\frac{ر\,فرطہ}{فرر} = مس\,فہ = \frac{ع}{\sqrt{ر^2 - ع^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (۶)$$

$$\text{جس سے} \quad طہ - عہ = \int \frac{ع\,فرر}{ر\sqrt{ر^2 - ع^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (۷)$$

اضافہ شدہ مستقل عہ کے تغیر کا اثر صرف اتنا ہے کہ یہ منحنی کو با تمام و کے گرد ایک زاویہ میں سے گھما دیتا ہے۔

۳۱۲ مثال ۱۔ مساوی الزاویہ لولبی میں

$$ع = ر\,جب\,عہ \quad \ldots\ldots\ldots (۸)$$

مثال ۲۔ دائرہ میں ر = ۲ا جب طہ (دفعہ ۶۳) اور فہ = طہ

$$\text{اس لئے} \quad \frac{ع}{ر} = \frac{ر}{۲ا} \quad \text{یعنی} \quad ع = \frac{ر^2}{۲ا} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

$$(۳) \quad \text{مکافی میں} \quad ر = ا\,قط^2\,\frac{طہ}{۲} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۱)$$

جہاں ماسکہ قطب ہے ہمیں حاصل ہوگا $فہ = \frac{\pi}{۲} - \frac{طہ}{۲}$، $ع = ر\,جم\,\frac{طہ}{۲}$، جس سے

$$ع^2 = ار \quad \ldots\ldots\ldots (۱۲)$$

اِس منحنی کی یہ مشہور خاصیت ہے۔

یہ مثال اور اوپر کی مثال دونوں ایک عام نتیجہ کے اندر شامل ہیں اور یہ نتیجہ اس نمونہ

$$\text{ر}^{\text{ن}} = \text{ا}^{\text{ن}}\ \text{جم ن طہ} \quad \ldots\ldots (۱۳)$$

کے تمام منحنیات کے متعلق صادق آتا ہے۔

دفعہ ۱۲۸ (۹) کی رو سے $\text{ع} = \text{ر جب فہ} = \text{ر جم ن طہ} \quad \ldots\ldots (۱۴)$

اور طہ ساقط کرنے سے $$\text{ع} = \frac{\text{ر}^{\text{ن}+۱}}{\text{ا}^{\text{ن}}} \quad \ldots\ldots (۱۵)$$

مثلاً صنوبری $(\text{ن} = \frac{۱}{۲})$ کی صورت میں $$\text{ع}^۲ = \frac{\text{ر}^۳}{\text{ا}} \quad \ldots\ldots (۱۶)$$

مثال ۴۔ مرکز دار مخروطوں کی مماسی قطبی مساوات یہاں دیجاتی ہے کیونکہ بعض اوقات حرکیات میں یہ استعمال ہوتے ہیں، اگرچہ ثبوت میں احصا کے استعمال کی ضرورت نہیں۔

فرض کرو کہ مبدأ مرکز پر ہے۔ مخروطی کی کارٹیزی مساوات یہ ہے

$$\frac{\text{لا}^۲}{\text{ا}^۲} \pm \frac{\text{ما}^۲}{\text{ب}^۲} = ۱ \quad \ldots\ldots (۱۷)$$

اگر بہ مزدوج نیم قطر ہو تو مرکز دار مخروطیوں کے معلومہ خواص کی بنا پر

$$\text{ع بہ} = \text{ا ب}،\quad \text{بہ}^۲ \pm \text{ر}^۲ = \text{ب}^۲ \pm \text{ا}^۲ \quad \ldots\ldots (۱۸)$$

اسلئے $$\frac{\text{ا}^۲\text{ب}^۲}{\text{ع}^۲} = \text{ب}^۲ \pm \text{ا}^۲ \mp \text{ر}^۲ \quad \ldots\ldots (۱۹)$$

قائم قطع زائد کی خاص صورت میں $\text{ع ر} = \text{ا}^۲ \quad \ldots\ldots (۲۰)$ کیونکہ $\text{بہ} = \text{ر}$

یہی نتیجہ اوپر (۱۵) میں $\text{ن} = -۲$ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۵۔ اِس کے بعد ایک ماسکہ کو قطب مانکر دوسرے ماسکہ کے لحاظ سے عمود اور سمتی نیم قطر کو بالترتیب عَ اور رَ سے تعبیر کرو۔ چونکہ مماس دو ماسکی نیم قطروں

۳۱۴ سے مساوی زاویے بناتا ہے اسلئے

$$\frac{\text{ع}}{\text{ر}} = \frac{\text{عَ}}{\text{رَ}} \quad \text{اور اس لئے} \quad \frac{\text{ع}^۲}{\text{ر}^۲} = \frac{\text{ع عَ}}{\text{ر رَ}}$$

اب ع عَ = $ب^2$ اور قطع ناقص میں ر + رَ = ۲ ا، اس لئے قطع ناقص کے لئے $\frac{ع^2}{ر} = \frac{ب^2}{۲ا - ر}$ یا اگر نیم وتر خاص $(\frac{ب^2}{ا})$ کے طول کو ل سے تعبیر کیا جائے تو

$$\frac{ل}{ع^2} = \frac{۲}{ر} - \frac{۱}{ا} \quad \text{......(۲۱)}$$

قطع زائد میں ہمیں حاصل ہوتا ہے $\frac{ل}{ع^2} = \pm\frac{۲}{ر} + \frac{۱}{ا}$ ......(۲۲)

اوپر کی علامت اس شاخ سے متعلق ہے جو مبدأ کے پاس ہے اور نیچے کی دور کی شاخ سے۔

مثال ۶۔ وہ منحنی دریافت کرو جسکے لئے $ع = \frac{ر^3}{ا^2}$ ......(۳)

(۶) میں درج کرنے اور تکمیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$طا - عا = \int \frac{ا^2\,فر\,ر}{ر\sqrt{ا^4 - ر^4}} = \frac{۱}{۲}جب^{-1}\frac{ر^2}{ا^2}$$

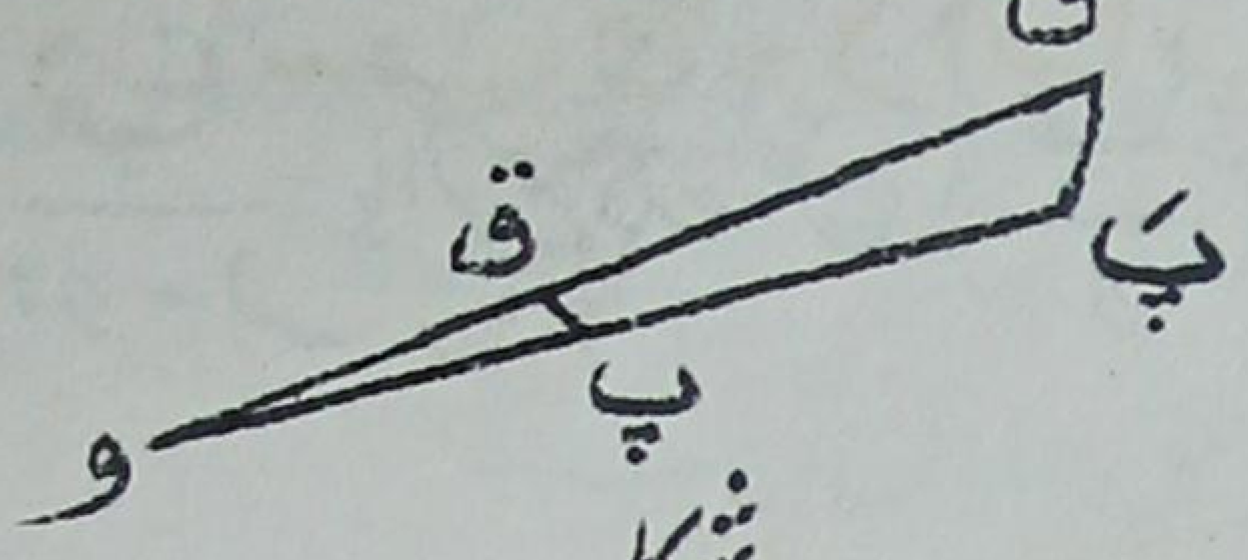
یا $ر^2 = ا^2\,جب\,۲(طا - عا)$ ......(۲۴)

جو چشمہ منحنی ہے۔

۱۳۰۔ مربوط منحنی۔ تقلیب۔ کئی ہندسی نظریہ ہیں جن میں ایک منحنی ایک اور منحنی کے ساتھ ایک خاص رشتہ کے ذریعہ متعلق ہوتا ہے۔ اسکی سادہ مثال تقلیب (Inversion) کی ہے۔ اگر ایک ثابت مبدأ و سے کسی معلومہ منحنی کا سمتی نیم قطر وپ کھینچا جائے اور وپ پر ایک نقطہ پَ ایسا لیا جائے کہ

$$وپ \times وپَ = م^2 \quad \text{......(۱)}$$

جہاں م ایک دیا ہوا مستقل ہے تو پَ کے طریق کو ہم پ کے طریق کا معکوس کہینگے۔ مبدأ و کو مرکز کہا جاتا ہے اور $م^2$ کو تقلیب کا "مستقل"۔



شکل (۹۹)

۳۱۴ کوئی منحنی اور اس کا مقلوب سمتی نیم قطر کے ساتھ تکمیل زاویے بناتے ہیں۔
کیونکہ اگر پ اور ق کسی منحنی کے متصل نقطے ہوں اور پَ، قَ مقلوب منحنی کے متناظر نقطے ہوں تو وپ × وپَ = وق × وقَ اور اسلئے

وپ : وق = وقَ : وپَ .... (۲)

اس لئے مثلث پ وق اور قَ وپَ باہم متشابہ ہیں اور زاویوں وپ ق اور وپَ قَ کا مجموعہ دو قائمہ ہے، انتہا میں جب ق، پ کے لاانتہا قریب ہو تو یہ زاویے وہ ہونگے جو مختلف مماس سمتی نیم قطر کے ساتھ بناتے ہیں۔

ہندسہ کی ابتدائی کتابوں میں یہ ثابت کیا جاتا ہے کہ دائرہ کا مقلوب، دائرہ ہے سوائے اس خاص صورت کے جبکہ تقلیب کا مرکز محیط پر ہو اور اس صورت میں ایک خط مستقیم ہے۔

کئی ترکیبوں سے ایک دئیے ہوئے منحنی کا مقلوب آلی طریق سے مرتسم ہو سکتا ہے۔

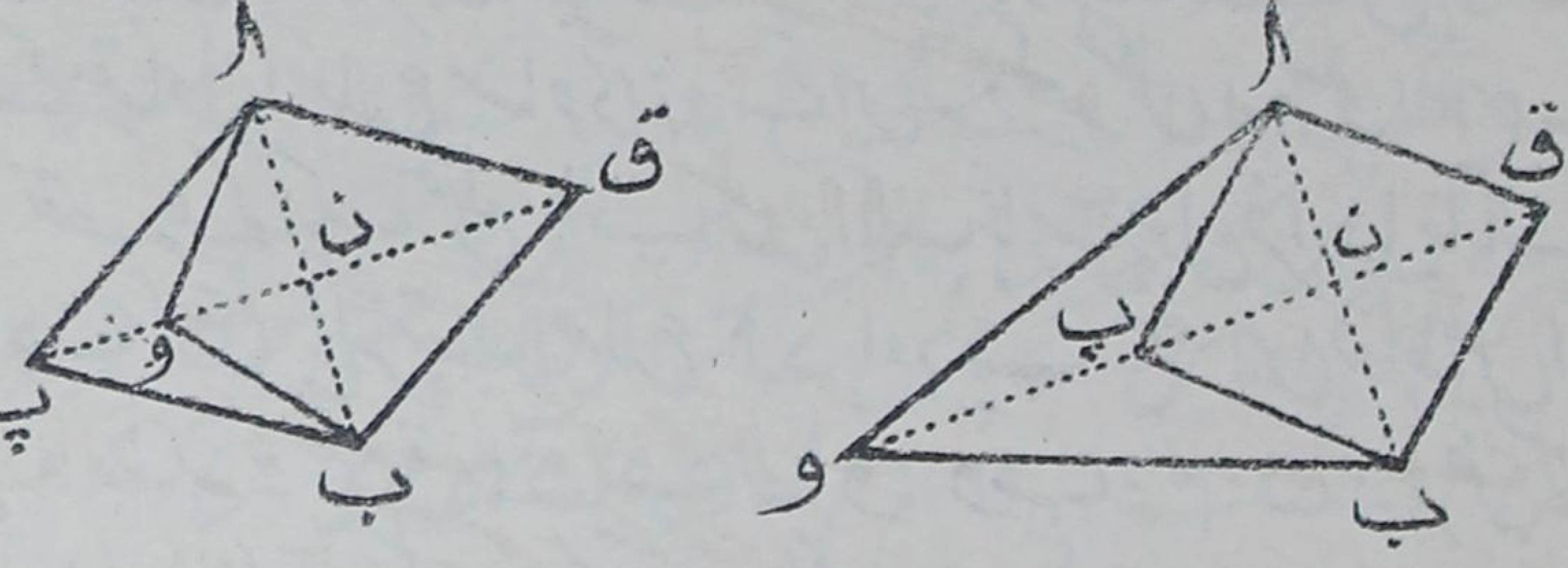
(۱) پوسیلئے (Peaucellier) کا رابطہ۔

اس میں چار سلاخوں کا ایک معین پ اق ب ہوتا ہے جس میں سلاخوں کے سرے چولوں کے ذریعہ آزادانہ طور پر وصل کئے ہوئے ہیں، نیز اسمیں اور دو مساوی سلاخیں ہوتی ہیں جو متقابل کے کونوں ا ب کو و پر کی ایک ثابت چول کے ساتھ ملاتی ہیں۔

ظاہر ہے کہ رابطہ خواہ کوئی شکل یا وضع اختیار کرے نقاط پ، ق ہمیشہ و میں سے گذرنے والے ایک خط مستقیم پر واقع ہونگے۔ اگر معین کے

وتروں کا نقطہ تقاطع ن ہو تو

وپ × وق = ون² ـ پ ن² = و ا² ـ ا پ² = مستقل ...(۱)

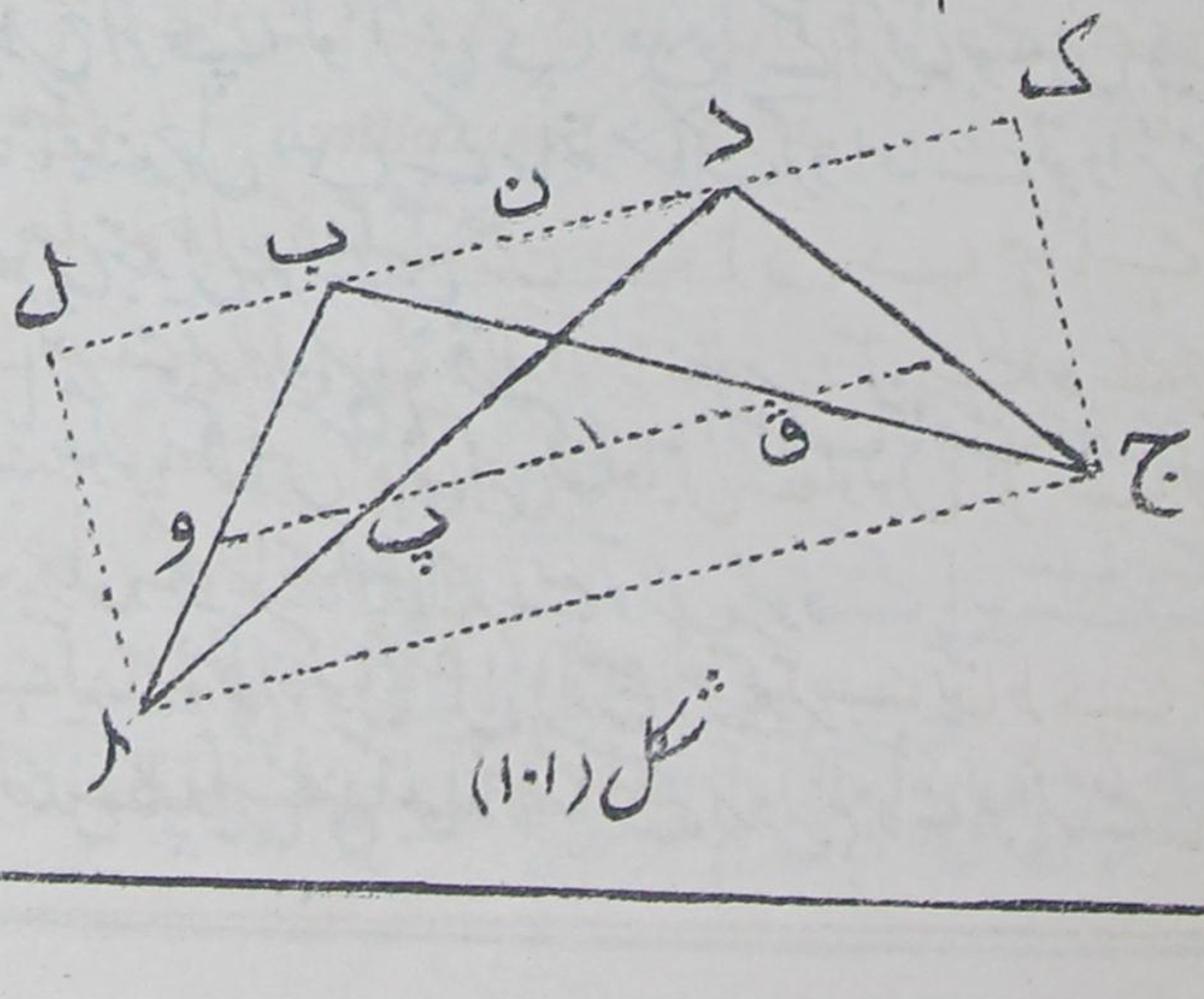


شکل (۱۰۰)

اسلئے اگر پ (یا ق) سے کوئی ایک منحنی مرتسم کرایا جائے تو ق (یا پ) بلحاظ نقطہ و کے مقلوب منحنی مرتسم کریگا۔

خاص طور پر اگر پ کو ایک ثابت چول س کے ساتھ کڑی کے ذریعہ منسلک کر دیا جائے اور س و = س پ تو پ کا طریق نقطہ و میں سے ایک دائرہ ہوگا اور اس لئے ق کا طریق و س پر علی القوائم ایک خط مستقیم ہوگا۔

اس سے اوس ضروری عملی مسئلہ کا صحیح حل حاصل ہوتا ہے کہ دائری
حرکت کو حرکت مستقیم میں رابطہ کاری کے ذریعہ کس طرح تبدیل کیا جائے۔ ۳۱۵



شکل (۱۰۱)

(۲) ہارٹ (Hart) کا رابطہ۔

اِس میں ایک "چلیپی" متوازی الاضلاع اب ج د ہوتا ہے جو چار سلاخوں کے سروں کو چولوں کے ذریعہ جوڑنے سے حاصل ہوتا ہے اور اِس کے متبادل اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔ دیکھو شکل ۱۰۱ صفحہ ۴۳۱۔

نقطہ و کو ایک ضلع اب میں ایک ثابت چول قرار دیا جاتا ہے اور نقاط پ، ق بالترتیب اضلاع اد اور ب ج میں نقاط ہیں ایسے کہ

اپ : پ د = ج ق : ق ب = او : و ب = م : ن (فرض کرو)۔

صریحاً و، پ، ق ایک خط مستقیم پر واقع ہیں جو اج اور ب د کے متوازی ہے۔

اگر ا اور ج کے قائم ظل ب د پر ل اور ک ہوں اور ن، ب د کا نقطہ وسطی ہو تو $\text{اج} \times \text{ب د} = 2\,\text{ن ل} \times 2\,\text{ن ب} = \text{دل}^2 - \text{ب ل}^2$

$= \text{اد}^2 - \text{اب}^2$

اب وپ : ب د = او : اب = م : م + ن

وق : اج = ب و : اب = ن : م + ن

اِس لئے $\text{وپ} \times \text{وق} = \frac{\text{م ن}}{(\text{م} + \text{ن})^2} (\text{اد}^2 - \text{اب}^2) = \text{مستقل}$ ....(۲)

اسلئے پ اور ق بلحاظ و کے مقلوب منحنی مرتسم کرتے ہیں۔

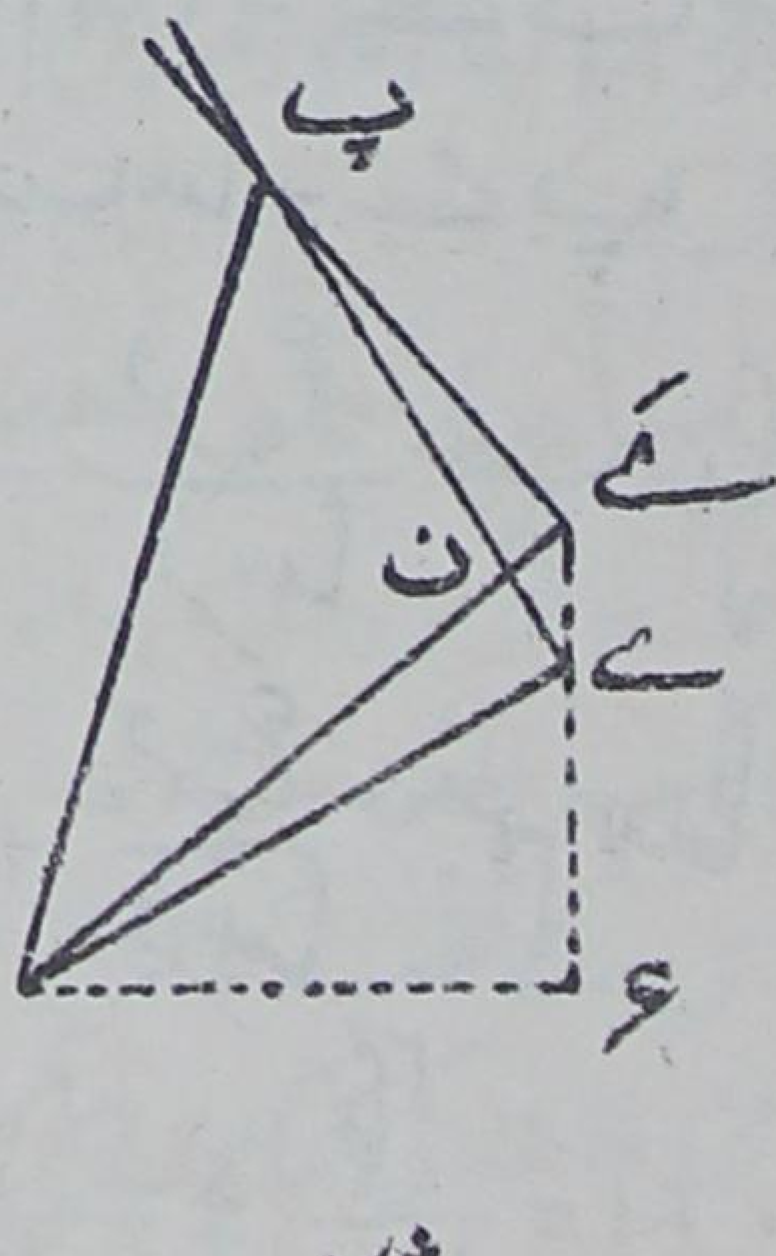
پہلے کیطرح اگر پ کو کڑی پ س کے ذریعہ جو س و کے مساوی ہے ایک ثابت چول س کے ساتھ منسلک کر دیا جائے تو دائری حرکت، خط مستقیم میں تبدیل ہو سکے گی۔

۱۳۱۔ پائیں منحنی، مکافی قطبی۔ اگر ایک ثابت نقطہ و سے منحنی کے کسی مماس پر عمود و ف کھینچا جائے تو اس عمود کے پایہ ف کے طریق کو بلحاظ مبدأ و کے اصلی منحنی کا "پائیں منحنی" کہتے ہیں۔

مثلاً مکافی کا پائیں منحنی بلحاظ ماسکہ کے راس پر کا مماس ہے۔ قطع ناقص

یا زائد کا پائین منحنی بلحاظ کسی ماسکہ کے "معاون دائرہ" ہے۔ مستقیم اگر و ے = ع اور سا وہ زاویہ ہو جو و ے کسی ثابت خط مستقیم کے ساتھ بناتا ہے تو ے کے قطبی محدد ع، سا خیال کئے جا سکتے ہیں جبکہ و قطب ہو۔ اس لئے اگر ع اور سا کے درمیان رشتہ معلوم ہو سکے تو پائین منحنی کی قطبی مساوات فوراً لکھی جا سکتی ہے۔

کسی منحنی اور اس کے پائین کے تسناظر نقاط پر سمتی نیم قطر مماسوں کے ساتھ جو زاوئے بناتے ہیں وہ باہم مساوی ہوتے ہیں۔ فرض کرو کہ و سے دو متصل مماسوں پ ے، پ ےَ پر عمود و ے، و ےَ ہیں اور ے ےَ ممدودہ پر عمود و ع ہے۔ و پ کے قطر پر جو دائرہ بنایا جائے نقاط ے، ےَ اس پر واقع ہوتے ہیں۔ اس لئے چار ضلعی و ے ےَ پ کا خارجی زاویہ و ے ع مقابل کے داخلی زاویہ و پ ےَ کے مساوی ہے۔ لیکن انتہا میں یہ وہ زاوئے ہیں جو و ے اور و پ بالترتیب پائین منحنی کے مماس اور اصلی منحنی کے مماس کے ساتھ بناتے ہیں۔



شکل (۱۰۲)

نیز، تشابہ مثلثوں سے

و ع : و ے = و ےَ : و پ ...... (۱)

اسلئے اگر اصلی منحنی کا سمتی نیم قطر ر ہو اور ع عمود ہو و سے مماس پر

اور ع َ عمود ہو و سے پائیں کے مماس پر تو بالآخر

ع َ / ع = ع / ر یا ع َ = ع² / ر ....(۲)

نیز اگر و ے، پ ے سے ن پر ملے تو ہم لکھ سکتے

و ے = ع، و ے َ = ع + مف ع، ے و ے َ = ے پ ے َ = مف سا

دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقداروں سے قطع نظر کرنے سے

مف ع = ن ے َ = پ ے مف سا

اسلئے انتہا لینے سے، جبکہ پ َ ے َ، پ ے پر منطبق ہو ہمیں منحنی کے مماس پر سمتی نیم قطر کے ظل کے لئے یہ جملہ حاصل ہوتا ہے

پ ے = فرع / فرسا ....(۳)

اس نتیجہ کی مدد سے "منفی پائیں منحنیوں" کا سوال حل ہو جاتا ہے یعنی اسکی مدد سے وہ منحنی مل جاتا ہے جس کا پائیں کوئی دیا ہو منحنی ہو۔ اگر و کو مبدا
۳۱۷ اور سا کے ابتدائی خط کو محور لا مانا جائے تو نقطہ تماس پ کے محدد ہیں

لا = و ے جم سا - ے پ جب سا

ما = و ے جب سا + ے پ جم سا

یا لا = ع جم سا - (فرع / فرسا) جب سا

ما = ع جب سا + (فرع / فرسا) جم سا ....(۴)

مثال ۱۔ اگر مخروطی لا² / ا² ± ما² / ب² = ۱ ....(۵)

کے مرکز پر مبدا ہو اور سا وہ زاویہ جو ع، و لا کے ساتھ بناتا ہے تو مخروطی تراشوں کی کتابوں میں یہ دکھایا گیا ہے کہ

ع² = ا² جم² سا ± ب² جب² سا ....(۶)

اس لئے پائیں منحنی کی قطبی مساوات ہے

ر^{2} = ا^{2} جم^{2} طہ ± ب^{2} جب^{2} طہ .... (۷)

قائم زائد   لا^{2} - ما^{2} = ا^{2} .... (۸)

کی صورت میں پائیں منحنی ہے   ر^{2} = ا^{2} جم ۲ طہ .... (۹)

مثال ۲۔ نیم قطر ا کے دائرے میں جہاں قطب و مرکز ج سے فاصلہ ج پر واقع ہو اگر خط و ج کو سما کا مبدأ مانا جائے تو شکل سے ظاہر ہے کہ

ع = ا + ج جم سما .... (۱۰)

اسلئے پائیں منحنی گھونگا منحنی ہے

ر = ا + ج جم طہ .... (۱۱)

اگر و محیط پر ہو جس صورت میں ج = ا تو پائیں منحنی خط صنوبری ہوگا

ر = ا (۱ + جم طہ) .... (۱۲)

مثال ۳۔ وہ منحنی دریافت کرو جس کا پائیں صنوبری

ر = ا (۱ + جم طہ) .... (۱۳)

ہے۔ اس مساوات کو اس طرح لکھنے سے

ع = ا (۱ + جم سما) .... (۱۴)

ضابطوں (۴) سے حاصل ہوتا ہے

لا = ا جم سما + ا، ما = ا جب سما

جس سے (لا - ا)^{2} + ما^{2} = ا^{2} .... (۱۵)

جو مبدأ میں سے گذرنے والا ایک دائرہ ہے۔

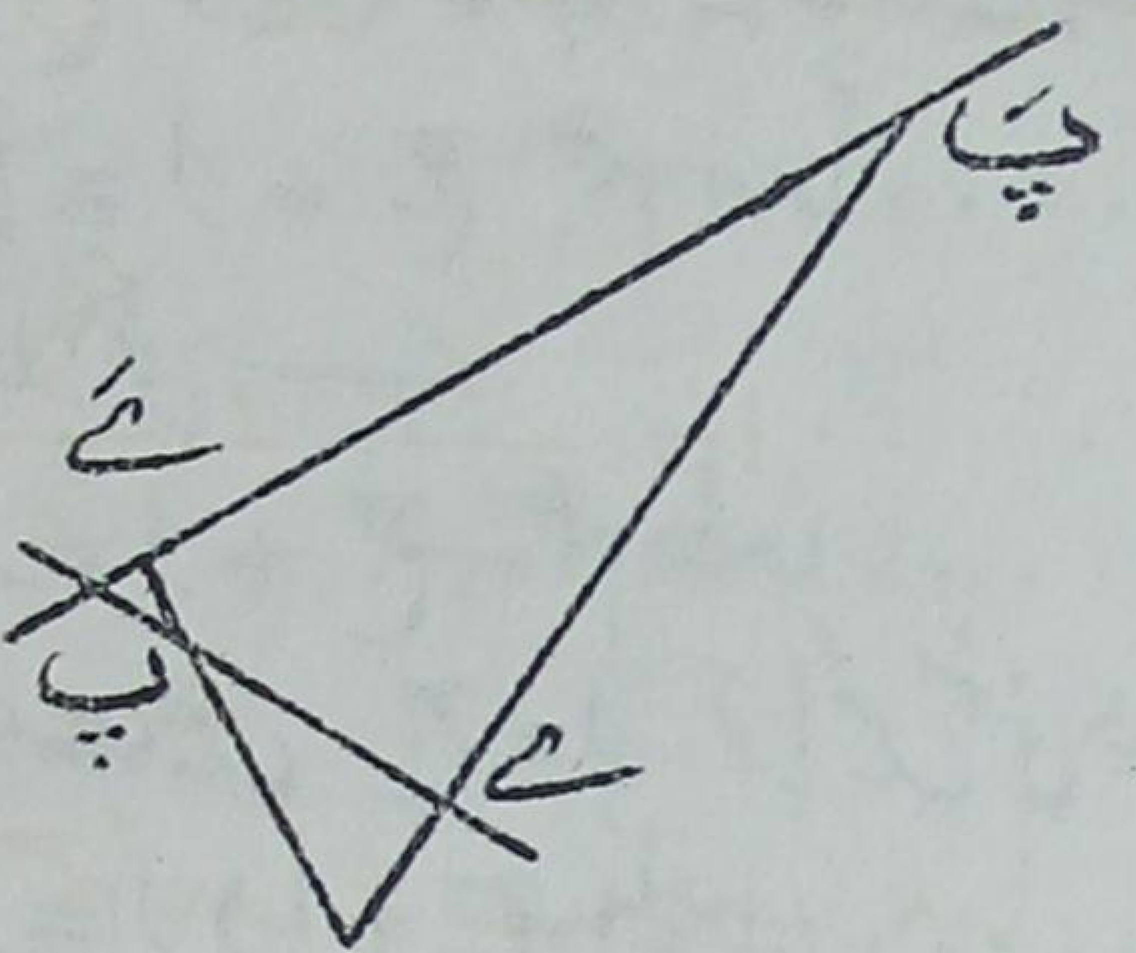
کسی منحنی ح کے مماس کے قطب کا طریق بلحاظ ایک ثابت مخروطی کے ۳۱۸
"متکافی قطبی" کہلاتا ہے، مخروطات کی کتابوں میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ اگر ح کے مماسوں کے قطبوں کا طریق ح' ہو تو ح' کے مماسوں کے قطبوں کا طریق ح ہوگا۔ "متکافی" کے استعمال کی یہی وجہ ہے۔

ہم اس صورت کا یہاں محض سرسری ذکر کردینگے جبکہ ثابت مخروطی دائرہ ہو۔ اگر اس دائرہ کا مرکز و ہو اور نیم قطر م تو منحنی ح کے کسی مماس کا قطب پ

اس طرح معلوم ہوتا ہے کہ اس مماس پر و سے عمود نکالا جائے اور و ے
پر ایک نقطہ پَ ایسا لیا جائے کہ

$$و ے \times و پَ = م^2 \quad \ldots\ldots (۱۶)$$

اس لئے اس صورت میں، تشاکلی قطبی بلحاظ نقطہ و کے دیے ہوئے منحنی کے
پائیں کا مقلوب ہے۔



شکل (۱۰۳)

اوپر کی تشاکلی خاصیت کی رو سے، اصلی منحنی کو پَ کے طریق کے پائیں کا مقلوب ہونا چاہیے۔ اسکی بآسانی تصدیق ہو سکتی ہے۔ کیونکہ اگر پ اصلی منحنی کے ساتھ مماس کا نقطہ تماس ہو اور اگر و پ، پَ کے طریق کے مماس کو ےَ پر ملے تو زاویہ
و پَ ےَ اور و پ ے مساوی ہونگے۔ اس لئے و ےَ پَ زاویہ قائمہ ہے اور ےَ، پَ کے پائیں منحنی کو مرتسم کرتا ہے۔ اور چونکہ
پ ے پَ ےَ ہم محیط چار ضلعی ہے اس لئے

$$و پ \times و ےَ = و ے \times و پَ = م^2 \quad \ldots\ldots (۱۷)$$

اس لئے پ، ےَ کے طریق کا مقلوب مرتسم کرتا ہے۔

مثال ۴۔ دائرہ کا قطبی تشاکلی بلحاظ کسی مبدأ کے ایک مخروطی تراش ہے جس کا
مبدأ اسکا ہے۔

مثال ۲ کی مانند دائرہ کے پائیں منحنی کا ضابطہ ہے

$$ع = ا + ج \, جم \, سا \quad \ldots\ldots (۱۸)$$

سا کی بجائے طہ اور ع کے لئے $\frac{م^2}{ر}$ لکھنے سے ہمیں قطبی مکافی کی مساوات اس شکل میں حاصل ہوتی ہے

$$\frac{م^2}{ر} = ۱ + ج \; جم \; طہ \qquad (۱۹)$$

جو ایک مخروطی تراش ہے، جس کا ماسکہ مبدا پر ہے اور جس کا خروج المرکز $\frac{ج}{ا}$ ہے۔ ۳۱۹
اس لئے مخروطی قطع ناقص، مکافی یا زائد ہے بموجب اس کے کہ مبدأ دائرہ کے اندر، اوپر یا باہر ہے۔

مثال ۵۔ مخروطی $\frac{لا^2}{ا^2} \pm \frac{ما^2}{ب^2} = ۱ \qquad (۲۰)$

کا پائیں منحنی بلحاظ مبدأ کے یہ ہے

$$ع^2 = ا^2 \, جم^2 \, سا \pm ب^2 \, جب^2 \, سا \qquad (۲۱)$$

اس لئے قطبی مکافی ہے

$$\frac{م^4}{ر^2} = ا^2 \, جم^2 \, طہ \pm ب^2 \, جب^2 \, طہ \qquad (۲۲)$$

یا

$$ا^2 \, لا^2 \pm ب^2 \, ما^2 = م^4 \qquad (۲۳)$$

جو ایک ہم مرکز مخروطی تراش ہے۔

۱۳۲۔ دو قطبی محدد۔ اگر کسی منحنی پر کوئی نقطہ پ ہو اور دو ثابت نقطوں یا ماسکوں س، سَ سے اس نقطہ کے فاصلے (ر، رَ) ہوں تو ان فاصلوں کے درمیان جو اس منحنی کے لئے رشتہ ہے اس کے ذریعہ اس منحنی کی تعریف ہو سکتی ہے۔ مثلاً

$$ف(ر، رَ) = ۰ \qquad (۱)$$

اگر زاویوں پ س سَ، پ سَ س کو بالترتیب طہ، طہَ سے تعبیر کیا جائے اور جو زاویے نیم قطر ر، رَ مماس کے ساتھ بناتے ہیں وہ فہ، فہَ ہوں تو دفعہ ۱۱۲ کی مانند

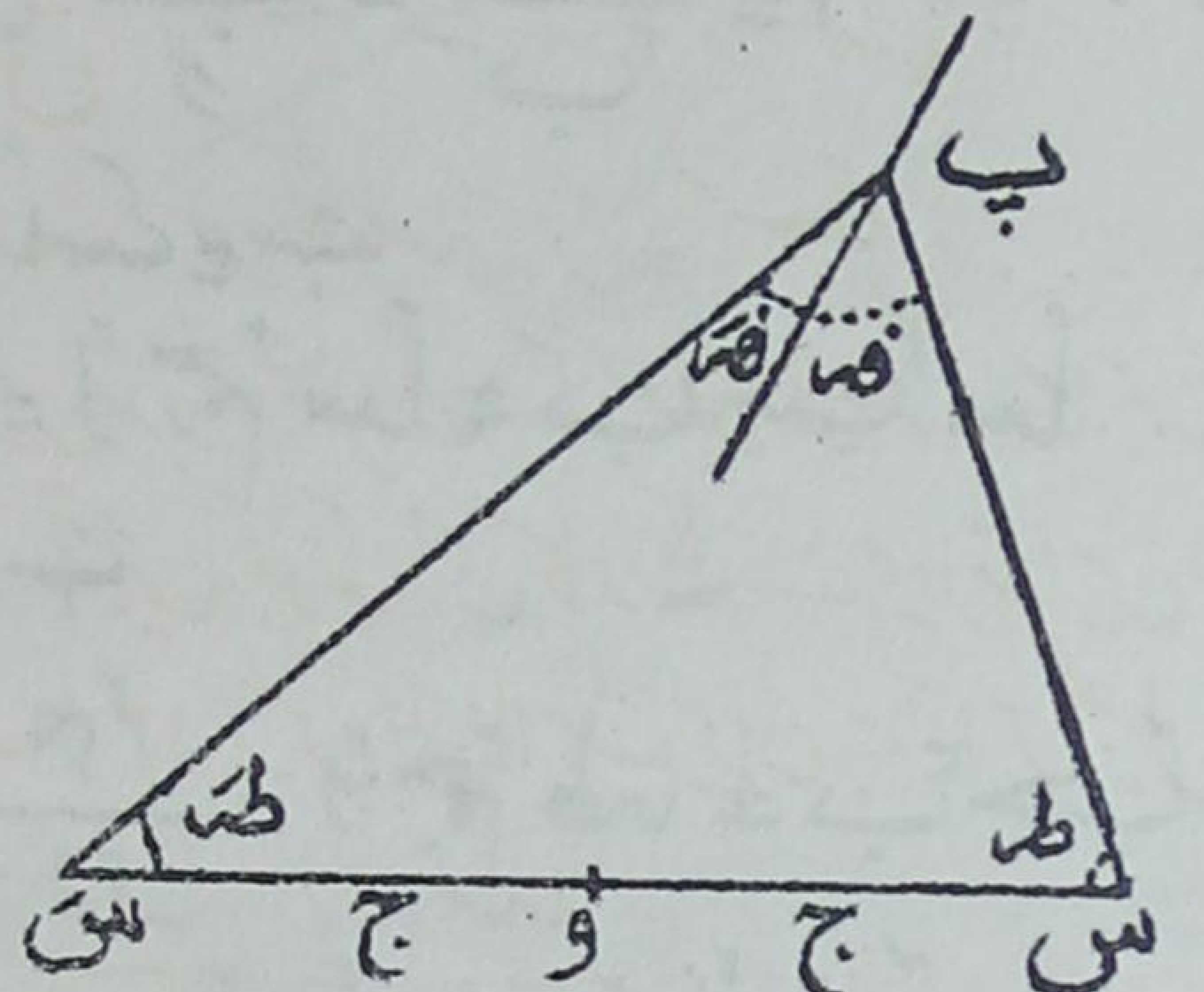
$$\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}} = \text{جم فہ} \ ، \ \frac{\text{فر رَ}}{\text{فر س}} = \text{جم فہَ} \qquad \ldots\ldots (۲)$$

$$\frac{\text{ر فر طہ}}{\text{فر س}} = \text{جب فہ} \ ، \ \frac{\text{رَ فر طہَ}}{\text{فر س}} = \text{جب فہَ}$$

علاوہ ماسکے ذیل کے رشتے ہیں

$$\text{ر جب طہ} = \text{رَ جب طہَ} \ ، \ \text{ر جم طہ} + \text{رَ جم طہَ} = \text{۲ ج} \qquad \ldots (۳)$$

جہاں $\text{ج} = \frac{1}{2}\ \text{س سَ}$



شکل (۱۰۴)

۳۲۰ مثال ۱۔ ناقص میں ر + رَ = ۲ ا ....(۴)

اس لئے $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}} + \frac{\text{فر رَ}}{\text{فر س}} =$ یعنی جم فہ + جم فہَ = ۰ یا فہَ = π - فہ ..(۵)

اس لئے ماسکی فاصلے منحنی کے ساتھ مکمل زاوے بناتے ہیں۔

اسی طرح سے قطع زائد میں ر ـ رَ = ۲ ا ....(۶)

جم فہ = جم فہَ ....(۷)

یعنی ماسکی فاصلے منحنی کے ساتھ متقابل جانبوں میں مساوی زاوے بناتے ہیں۔

مثال ۲۔ ایک انعکاسی یا انعطافی سطح کی شکل دریافت کرو کہ تمام ایسی شعاعیں جو ایک ثابت نقطہ س میں سے گذرتی ہیں اور اس پر گرتی ہیں انعکاس اور انعطاف

کے بعد بھی ایک ثابت نقطہ سَ میں سے گذریں۔

انعکاس کی صورت مثال (۱) کا عکس ہوگی سطح ایسی ہونا چاہئے جو ناقص یا زائد کو، ماسکوں (س، سَ) کے ملانے والے خط کے گرد پھرانے سے حاصل ہو۔

انعطاف کی صورت میں اگر دو واسطوں کے انعطاف نما مہا اور مہاَ ہوں

تو مہا جب صہ = مہاَ جب صہَ .... (۸)

جہاں صہ = ± $(\frac{\pi}{2}$ - فہا)، صہَ = ± $(\frac{\pi}{2}$ - فہاَ) ..... (۹)

اس لئے مہا جم فہا ± مہاَ جم فہاَ = ۰ .... (۱۰)

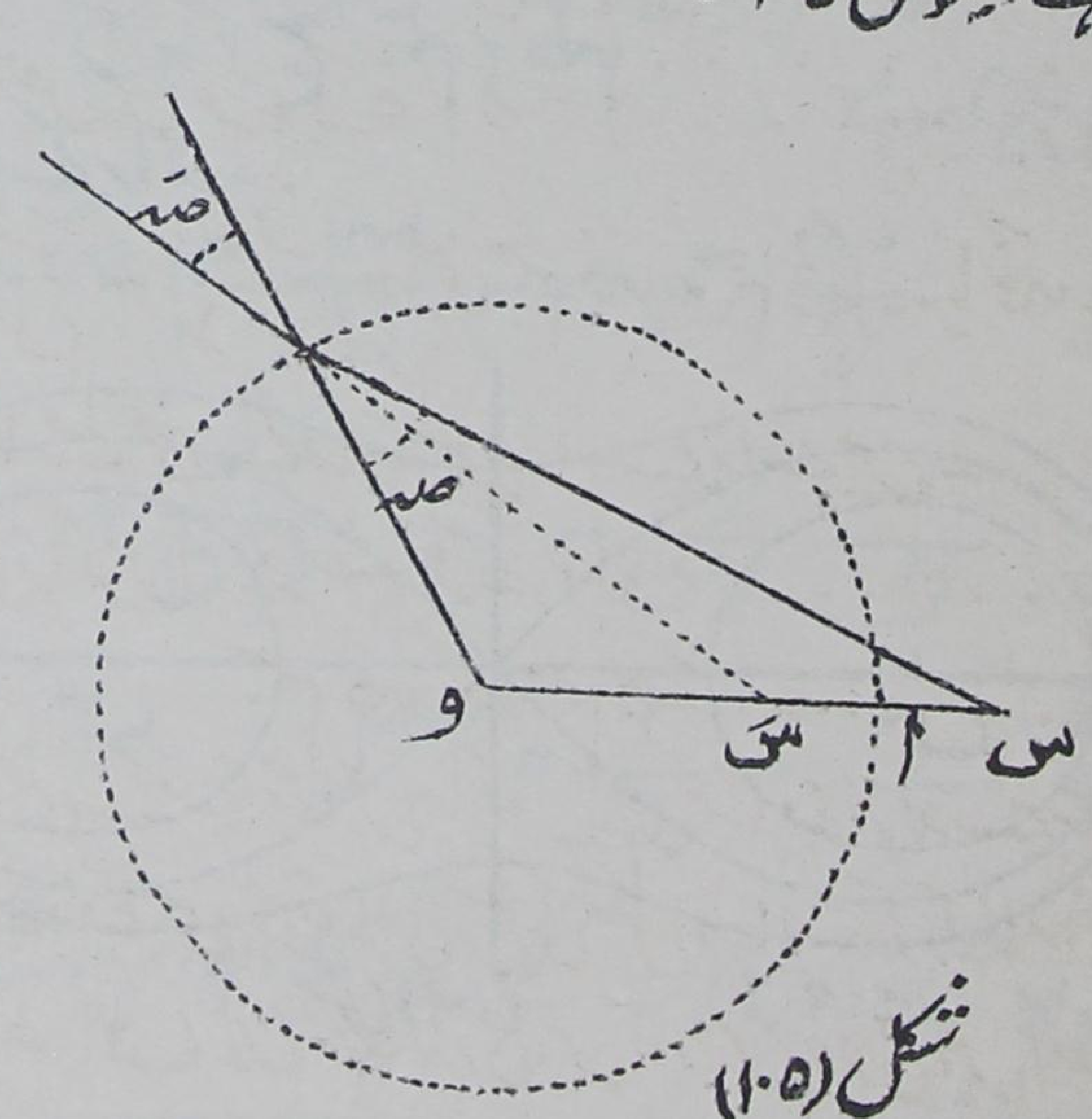
یا $\frac{ف}{فس}$ (مہا ر ± مہاَ رَ) = ۰ .... (۱۱)

تکمل سے مہا ر ± مہاَ رَ = مستقل .... (۱۲)

ایسے منحنیات جن میں دو نیم قطروں کے معلومہ ضعفوں کا مجموعہ (یا فرق) مستقل ہو کارٹیزی بیضہ کہلاتے ہیں کیونکہ ڈی کارٹ نے ہی ابتدا میں علم مناظر کے اس مسئلہ پر بحث کی۔ جب (۱۲) میں نچلی علامت لیجاتی ہے تو اس قبیل کے اندر دائرہ

$\frac{ر}{رَ} = \frac{مہا}{مہاَ}$ .... (۱۳)

شامل ہوجاتا ہے دیکھو شکل ۱۰۵۔ ۳۲۱



شکل (۱۰۵)

مثال ۳- کیسینی (Cassini) کے بیضوی منحنیات کی یہ تعریف ہے۔

$$ر\,رَ = م^2 \quad \ldots\ldots (۱۴)$$

جہاں م مستقل ہے۔ چونکہ ایک ایسے نقطہ پ کے لئے جو خط س سَ پر نقاط س، سَ کے درمیان واقع ہو ر رَ کی بڑی سے بڑی قیمت ج² ہے اس لئے منحنی دو الگ الگ بیضوں پر مشتمل ہوگا جو بالترتیب س، سَ کے گرد بنے ہونگے اگر م < ج اور صرف ایک بیضہ پر مشتمل ہوگا جو دونوں نقاط کو گھیرے ہوئے ہوگا جبکہ م > ج۔

اس خاص صورت میں جبکہ م = ج، منحنی کی عینک جیسی شکل ہوگی۔ اسے ہم برنولی کا چشمہ منحنی (Lemniscate.) کہینگے۔ یہ منحنی متعدد مسائل ریاضی میں آتا ہے۔ اگر س سَ کے وسطی نقطہ و کو قطب مانا جائے اور و س کو ابتدائی خط اور ان کے لحاظ سے محددوں کا ایک نظام ($ر_1$، $طہ_1$) ہو تو

$$ر^2 = ر_1^2 + ج^2 - 2ج\,ر_1\,جم\,طہ_1 ، \quad رَ^2 = ر_1^2 + ج^2 + 2ج\,ر_1\,جم\,طہ_1$$

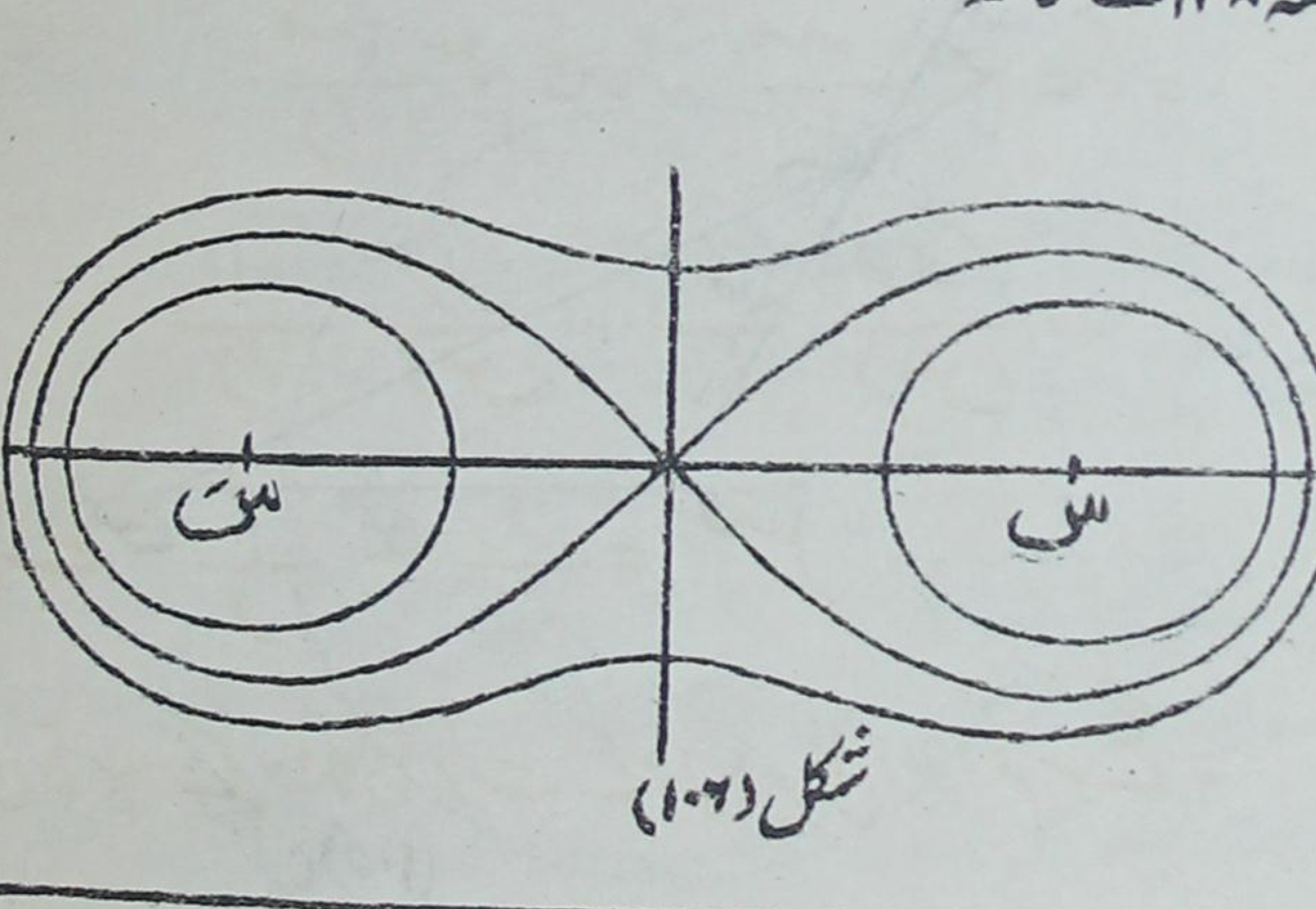
اسلئے چشمہ منحنی کی مساوات ہے

$$(ر_1^2 + ج^2)^2 - 4ج^2 ر_1^2 جم^2 طہ_1 = ج^4$$

جو تحویل کے بعد ہو جاتی ہے

$$ر_1^2 = 2ج^2 جم\,2طہ_1 \quad \ldots\ldots (۱۵)$$

مقابلہ کرو دفعہ ۱۲۸ کے ساتھ۔



شکل (۱۰۶)

۳۲۲ مثال ۴۔ مقناطیسی منحنی۔ اگر س، سَ ایک مقناطیس کے شمالی اور جنوبی قطب ہوں تو کسی نقطہ پ پر قوتیں ہونگی $\frac{\text{م}}{\text{ر}^2}$ سمت س پ میں اور $\frac{\text{م}}{\text{رَ}^2}$ سمت پ سَ میں۔ "قوت کا خط" ایسا خط ہے جو نقطہ بہ نقطہ حاصل قوت کی سمت میں کھینچا جائے۔ اس امر کو بیان کرنے سے کہ کل قوت اس خط کی عمود وار سمت میں صفر ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{م}}{\text{ر}^2}\,\text{جب فا} + \frac{\text{م}}{\text{رَ}^2}\,\text{جب فاَ} = ٠$$

یا

$$\frac{1}{\text{ر}}\,\frac{\text{فر طا}}{\text{فرس}} + \frac{1}{\text{رَ}}\,\frac{\text{فر طاَ}}{\text{فرس}} = ٠ \quad \ldots\ldots (۱۶)$$

اب چونکہ ر جب طا = رَ جب طاَ اس لئے

$$\text{جب طا}\,\frac{\text{فر طا}}{\text{فرس}} + \text{جب طاَ}\,\frac{\text{فر طاَ}}{\text{فرس}} = ٠$$

یا

$$\text{جم طا} + \text{جم طاَ} = \text{مستقل} \quad \ldots\ldots (۱۷)$$

"مساوی قوہ کا خط" وہ ہے کہ ایک مقناطیسی قطب پر جو اسے مرتسم کرے کوئی کام نہ ہو۔ اس امر کو بیان کرنے سے کہ کل قوت اس خط کی سمت میں صفر ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{م}}{\text{ر}^2}\,\text{جم فا} - \frac{\text{م}}{\text{رَ}^2}\,\text{جم فاَ} = ٠$$

یا

$$\frac{1}{\text{ر}^2}\,\frac{\text{فرر}}{\text{فرس}} - \frac{1}{\text{رَ}^2}\,\frac{\text{فررَ}}{\text{فرس}} = ٠ \quad \ldots\ldots (۱۸)$$

جس سے

$$\frac{1}{\text{ر}} - \frac{1}{\text{رَ}} = \text{مستقل} \quad \ldots\ldots (۱۹)$$

مساوی قوہ کے خط لازماً قوت کے خطوط پر علی القوائم ہونگے۔

امثلہ ۴۲

جبریہ منحنی

۱- ان منحنیات کو مرتسم کرو $\text{ما}^{2} = 4\,\text{لا}\,(1 - \text{لا})$ ، $\text{ما} = \text{لا}^{2} + \text{لا} + 1$

۲- منحنی $\text{ا}\,\text{ما}^{2} = \text{لا}^{2}\,(\text{ا} - \text{لا})$ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اسکے حلقہ کا رقبہ $\frac{8}{15}\,\text{ا}^{2}$ ہے۔ یہ معلوم کرو کہ حلقہ کا عرض کہاں بڑے سے بڑا ہے۔ [$\text{لا} = \frac{2}{3}\,\text{ا}$]

۳- منحنی $\text{ا}^{2}\,\text{ما}^{2} = \text{لا}^{2}\,(\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2})$ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اس کے دو حلقے ہیں اور ہر ایک کا رقبہ $\frac{2}{3}\,\text{ا}^{2}$ ہے۔

۴- منحنیات $\text{ما}^{2} = \text{لا}\,(\text{لا}^{2} - 1)$ ، $\text{ما}^{2} = \text{لا}^{3}\,(1 - \text{لا})$ کو مرتسم کرو۔ ۳۲۳

۵- منحنی $\text{ا}^{4}\,\text{ما}^{2} = \text{لا}^{4}\,(\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2})$ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اس کا رقبہ $\frac{1}{4}\,\pi\,\text{ا}^{2}$ ہے۔

۶- منحنی $\text{ا}^{2}\,\text{ما}^{4} = \text{لا}^{4}\,(\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2})$ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اسکا رقبہ $\frac{8}{5}\,\text{ا}^{2}$ ہے۔

۷- ثابت کرو کہ منحنی $\text{ا}\,\text{ما}^{2} = \text{لا}^{3}$ (شکل ۷۰) کی قوس کا طول، راس سے اس نقطہ تک جس کا فصلہ لا ہے، یہ ہے $\frac{1}{27\sqrt{\text{ا}}}\,(9\,\text{لا} + 4\,\text{ا})^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}\,\text{ا}$

۸- منحنی $\text{ا}\,\text{ما}^{2} = \text{لا}^{3}$ اور خط $\text{لا} = \text{ھ}$ کے درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے اسکا اوسط مرکز $(\frac{5}{7}\,\text{ھ}، 0)$ ہے۔

۹- منحنی $\text{ا}\,\text{ما}^{2} = \text{لا}^{3}$ محور لا کے گرد گھومتا ہے، ثابت کرو کہ وہ حجم جو سطح مکونہ اور محور پر عمود دار ایک مستوی کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ اُس مستدیر اسطوانہ کے حجم کا ایک چوتھائی ہے جس کا طول اور دائری قاعدہ دونوں وہی ہیں جو سطح مقطوعہ کے ہیں۔

۱۰- اِن منحنیات کو مرتسم کرو $\text{ما}^{2} = \frac{1}{\text{لا}}$ ، $\text{ما}^{2} = \frac{1}{\text{لا}\,(1 - \text{لا})}$

۱۱- رقبہ جو منحنی $\frac{\text{ما}^{2}}{\text{ا}^{2}} = \frac{\text{ا} - \text{لا}}{\text{لا}}$ (شکل ۷۲) اور اس کے متقارب کے درمیان

گھرا ہوا ہے وہ $\pi\,\text{ا}^2$ ہے۔
اگر یہی منحنی اپنے متقارب کے گرد گھومے تو جو مجسم پیدا ہوگا اِس کا حجم $\frac{1}{2}\pi^2\,\text{ا}^3$ ہوگا

۱۲۔ اِن منحنیات کو مرتسم کرو $\text{ما}^2 = \frac{\text{لا}^2+1}{\text{لا}}$ ، $\text{ما}^2 = \frac{\text{لا}^2-1}{\text{لا}}$

۱۳۔ اِن منحنیات کو مرتسم کرو $\text{ما}^2 = \frac{\text{لا}^2+1}{\text{لا}^2}$ ، $\text{ما}^2 = \frac{\text{لا}^2-1}{\text{لا}^2}$

۱۴۔ اِن منحنیات کو مرتسم کرو $\text{ما}^2 = \frac{\text{لا}}{\text{لا}^2+1}$ ، $\text{ما}^2 = \frac{\text{لا}}{1-\text{لا}^2}$
اعظم اور اقل معین (اگر کوئی ہوں) اور نقاط انعطاف دریافت کرو۔

۱۵۔ منحنی $\text{ما}^2 = \frac{\text{لا}^3}{\text{ا}-\text{لا}}$ (شکل ۷۴) اور اس کے متقارب کے ۳۲۴
درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے وہ $\frac{3}{4}\pi\,\text{ا}^2$ ہے۔ اگر یہ منحنی اپنے متقارب کے گرد گھومے
تو جو مجسم پیدا ہوگا اس کا حجم $\frac{1}{4}\pi^2\,\text{ا}^3$ ہوگا۔

۱۶۔ منحنی $\text{ما}^2 = \frac{\text{ا}^2\,\text{لا}^2}{\text{ا}^2+\text{لا}^2}$ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اس کا رقبہ اسکی دو شاخوں
اور کسی ایک متقارب کے درمیان $2\,\text{ا}^2$ ہے۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ منحنی $\text{ما}^2 = \text{لا}^2\,\frac{\text{ا}+\text{لا}}{\text{ا}-\text{لا}}$ (شکل ۷۳) اور اس کے متقارب کے
درمیان کا رقبہ $\frac{1}{2}(\pi+4)\,\text{ا}^2$ ہے۔

۱۸۔ منحنی $\text{ما}^2 = \frac{\text{لا}^4}{\text{ا}^2-\text{لا}^2}$ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ منحنی اور کسی ایک متقارب
کے درمیان رقبہ $\frac{1}{2}\pi\,\text{ا}^2$ ہے۔

۱۹۔ منحنی $\text{ما}^2 = \text{لا}^2\,\frac{\text{ا}^2-\text{لا}^2}{\text{ا}^2+\text{لا}^2}$ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اِس کے حلقہ کا
رقبہ $\frac{1}{2}(\pi-2)\,\text{ا}^2$ ہے۔

۲۰۔ منحنی ما^2 = $\frac{\text{لا}^2}{\text{ل}^2}$ (۲ل − لا)(لا − ل) کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ یہ رقبہ $\frac{3}{8}\pi$ ل^2 گھیرتا ہے۔

۲۱۔ منحنی ما^2 = $\frac{\text{لا}}{\text{ل}}$ (لا − ب)^2 + ج^2 کو مرتسم کرو۔

۲۲۔ منحنی لا = ت − ت^3، ما = ۱ − ت^4 کو ت کی حقیقی قیمتوں کے لئے مرتسم کرو۔ اور ثابت کرو کہ یہ ایک حلقہ پیدا کرتا ہے جس کا رقبہ $\frac{16}{35}$ ہے۔

امثلہ ۵۳ ۳۲۵

(زنجیرہ، خط تدویر وغیرہ)

۱۔ ثابت کرو کہ زنجیرہ ما = ج جمز $\frac{\text{لا}}{\text{ج}}$ میں س^2 = ما^2 − ج^2

۲۔ ثابت کرو کہ زنجیرہ ہی ایک منحنی ہے جس میں معین کے پایہ سے مماس پر عمود مستقل طول کا ہوتا ہے۔

۳۔ ایک ہی اونچائی پر دو معلومہ نقطے ہیں، ثابت کرو کہ ان تمام زنجیرہ خطوط میں سے، جو ان نقطوں میں سے گذرتے ہیں اور جن کے محور انتصابی ہیں ایک زنجیرہ ایسا ہے جس میں ان نقاط کے نیچے مرتب کی گہرائی کم سے کم ہے۔

نیز ثابت کرو کہ اس زنجیرہ میں مذکورہ نقطوں پر کے مماس ایک دوسرے سے مرتب پر ملتے ہیں۔

اگر ان نقطوں کے درمیان فاصلہ ۲ ب ہو تو مرتب کی گہرائی ب جمز ع ہے منحنی کی قوس $\frac{\text{ب جمز ع}}{\text{ع}}$ ہے اور دئے ہوئے نقاط پر منحنی کا میلان افق کے ساتھ جم$^{-1}$ (قطز ع) ہے جہاں ع مساوات ع مسز ع = ۱ کی مثبت اصل ہے۔

۴۔ خط جرّی (Tractrix) کے کسی نقطہ کے محددات شکلوں میں بیان ہو سکتے ہیں لا = ا (ع ۔ مسنہ ع)، ما = ا قطہ ع

جہاں ع متغیر متبدل (parameter.) ہے۔

۵۔ ثابت کرو کہ خط جرّی میں ما = ا قو^{س/ا}

جہاں قوس س قرن سے ناپی گئی ہے۔

۶۔ اس مجسم کا حجم جو خط جرّی کو اس کے متقارب کے گرد گھمانے سے پیدا ہو ۲/۳ π ا^۳ ہے۔

اسی مجسم کی سطح ۴ π ا^۲ ہے۔

۷۔ اگر ایک متحرک نقطہ کے محدد لا = ا جمز ن ت، ما = ب جبز ن ت ہوں جہاں ت وقت ہے تو اس کا راستہ قطع زائد ہوگا اور اس کی رفتار مزدوج نیم قطر کے طول کے متناسب ہوگی جو مزدوج زائد کے ساتھ اسکے تقاطع تک ناپا گیا ہے۔

نیز ثابت کرو کہ سمتی نیم قطر جو رقبہ عبور کرتا ہے وہ وقت کے ساتھ یکساں طور پہ بڑھتا ہے۔

۸۔ لیسازو کے منحنی لا = ا جب ۲ (ن ت ۔ صہ)، ما = ب جم ن ت کے کسی حلقہ کا رقبہ ۴/۳ ا ب جم ۲ صہ ہے۔

۹۔ ثابت کرو کہ لیسازو کا منحنی لا = ا جم ن ت، ما = ب جم ۳ ن ت منحنی ما/ب = لا/ا (۴ لا^۲/ا^۲ ۔ ۳) کے کچھ حصہ پہ مشتمل ہے۔ اس منحنی کو مرتسم کرو۔

۱۰۔ اگر خط تدویر میں لڑکنے والے دائرہ کی زاوی رفتار مستقل ہو تو مرسم نقطہ پ کی رفتار عماد سے پ (شکل ۱۷) کے متناسب ہوگی۔

۱۱۔ خط تدویر کو اس کے قاعدہ کے گرد گردش دینے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اسکا حجم ۵ π^۲ ا^۳ ہے جہاں مکون دائرہ کا نیم قطر ا ہے۔

اسی مجسم کی سطح ۶۴/۳ π ا^۲ ہے۔

۱۲۔ خط تدویر کا وہ حصہ جو دو متواتر قرنوں کے درمیان ہے راس پر کے مماس کے گرد گھومتا ہے۔ ثابت کرو کہ سطح مکونہ کا رقبہ ۳۲/۳ π ا^۲ ہے۔

نیز ثابت کرو کہ مذکورہ بالا سطح اور اُن دائروں کے مُستویوں کے درمیان جنہیں قرن پیدا کرتے ہیں گھرا ہوا حجم π² ا³ ہے۔

۱۳۔ خط تدویر اپنے محور کے گرد گھومنے سے جو حجم پیدا کرتا ہے وہ ہے ۱/۶ (۹ π² − ۱۶) π ا³ ۔

۱۴۔ اسی مجسم کی سطح ۴/۳ (۳ π − ۴) π ا² ہے۔

۱۵۔ ایک قرن سے دوسرے قرن تک جو خط تدویر کی قوس ہے اس کا اوسط مرکز قاعدہ سے ۴ا/۳ فاصلہ پر ہے۔

۱۶۔ خط تدویر اور اسکے قاعدہ کے درمیان جو رقبہ ہے اس کا اوسط مرکز قاعدہ سے فاصلہ ۵/۶ ا پر ہے۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ منحنی لا$^{۲/۳}$ + ما$^{۲/۳}$ = ا$^{۲/۳}$ میں کسی نقطہ پر کا مماس محددوں کے محوروں پر جو مقطوعے کاٹتا ہے وہ بالترتیب ا$^{۲/۳}$ لا$^{۱/۳}$ اور ا$^{۲/۳}$ ما$^{۱/۳}$ ہیں۔

اس طرح اس کی تصدیق کرو کہ محوروں کے درمیان مماس کا طول مستقل ہے۔

۱۸۔ مساواتوں لا = ا جم³ طہ، ما = ا جب³ طہ سے ثابت کرو کہ ستارہ نما (Astroid) میں فرس/فرطہ = ۳ ا جب طہ جم طہ اور اسلئے منحنی کا کل طول ۶ ا ہے۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ ستارہ نما کا کل رقبہ ۳/۸ π ا² ہے۔

۲۰۔ دو مقابل کے قرنوں کو ملانے والے خط کے گرد ستارہ نما کو گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کا حجم ۳۲/۱۰۵ π ا³ ہے۔ ۴۲۷

۲۱۔ منحنی لا = ا جم³ طہ، ما = ب جب³ طہ کے ربع کا طول (ا² + اب + ب²)/(ا + ب) ہے اور رقبہ جو یہ منحنی گھیرتا ہے وہ ۳/۸ π ا ب ہے۔

۲۲۔ ن، قرنوں والے بریادر تدویر کا کل محیط ۸(ن ± ۱)/ن ا ہے جہاں ا

ثابت دائرہ کا نیم قطر ہے۔

۲۳۔ اُس منحنی کا خاکہ کھینچو جو دو یکساں دائری حرکتوں کو ترکیب دینے سے پیدا ہو جبکہ دائروں کے نیم قطر مساوی ہوں لیکن دَور ذرا مختلف ہوں (۱) جبکہ گھماؤ ایک ہی سمت میں ہوں اور (۲) جبکہ گھماؤ مقابل سمتوں میں ہوں۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ ہر دوریہ میں مماس مرکز میں سے نہیں گزر سکتا جبتک کہ ن ج > نَ جَ جہاں دو مقداروں ج، جَ میں سے ج بڑا ہے (دفعہ ۱۲۵)

۲۵۔ ثابت کرو کہ استداری (ا) = ا طہ + ک جب طہ، ا = ا ک جم طہ کی پوری موج کا طول ایک قطع ناقص کے محیط کے مساوی ہے جس کے نیم محور ا + ک اور ا − ک ہیں۔

امثلہ ۴

قطبی محدد

۱۔ ثابت کرو کہ ایک ہی زاویہ والے تمام مساوی الزاویہ لولبی تماثلاً مساوی ہوتے ہیں۔

۲۔ زاویہ عہ والے مساوی الزاویہ لولبی میں سمتی نیم قطر (ل) جو رقبہ عبور کرتا ہے وہ ہے $\frac{1}{4}\left(\text{ل}_2^2-\text{ل}_1^2\right)$ کس عہ جہاں ل۱، ل۲ اطراف میں ل کی قیمتیں ہیں۔

۳۔ ثابت کرو کہ ارشمیدس کے لولب میں زاویہ (فہ) جو مماس اور سمتی نیم قطر کے درمیان بنتا ہے وہ اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم فہ} = \frac{1}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ر}^2}}$$

۴۔ ثابت کرو کہ متکافی لولب میں نیم قطر جو رقبہ عبور کرتا ہے اس کا اضافہ نیم قطر کے متناسب ہے۔

۵۔ ثابت کرو کہ خط صنوبری کے قطب میں سے گزرنے والے تمام وتر ایک ہی طول کے

ہوتے ہیں - کیا یہی بات درست ہے گھونگا منحنی کے لئے -

۶- خط صنوبری ر = ا (۱ + جم طہ) کا رقبہ ۳/۲ π ا^۲ ہے -

۷- منحنی ر = ا + ۲ ا جم طہ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اندرونی حلقہ کا رقبہ ۵۴۳۵ء۱ ا^۲ ہے -

۸- ثابت کرو کہ خط صنوبری ہیں فرس / فرطہ = ۲ ا جم (طہ / ۲) اور اس طرح دکھاؤ کہ کل محیط ۸ ا ہے -

۹- خط صنوبری کو اس کے محور کے گرد گھمانے سے جو جسم پیدا ہوتا ہے وہ ۸/۳ π ا^۳ ہے

۱۰- خط صنوبری میں ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا عرض (محور پر عمود وار) ۳/۲ √۳ ا ہے اور دوہرا مماس محور کو قطب سے فاصلہ ا/۴ پر ملتا ہے -

۱۱- گھونگا منحنی ر = ا جم طہ + ج میں اعظم معین اور اقل فصلہ معلوم کرو

۱۲- گھونگا منحنی ر = ا جم طہ + ج کا رقبہ جبکہ ج > ا ہے π (ج^۲ + ا^۲/۲)

۱۳- ہندسی طریق پر ثابت کرو کہ اگر دو خطوط مستقیم دو ثابت دائروں کو مس کریں اور ایک دوسرے کے ساتھ مستقل زاویہ بنائیں تو انکے تقاطع کا طریق گھونگا منحنی ہے

۱۴- کل رقبہ چشمہ منحنی ر^۲ = ا^۲ جم ۲ طہ کا ا^۲ ہے -

۱۵- نیز اس منحنی کے ہر حلقہ کا محیط ہے ۲ ا ∫ (۰ سے π/۴) فرطہ / √(۱ - ۲ جب^۲ طہ) -

ثابت کرو کہ ناقصی تکملون (دفعہ ۱۱۱) کی ترقیم میں یہ تکملہ مساوی ہے √۲ ا ت ا (۱/√۲) کے -

۱۶- چشمہ منحنی کے کسی حلقہ کے رقبہ کا اوسط مرکز قطب سے فاصلہ ۳۲۹

۱/۸ √۲ π ا پر ہے -

۱۷- بردوریہ ر = ا جب م طہ کے ایک حلقہ کا رقبہ ہے π ا^۲ / ۴ م -

۱۸- منحنی ر^۲ = ا^۲ جم طہ کو مرتسم کرو -

۱۹۔ "زیادہ سے زیادہ تجاذب والے مجسم کے لئے" یعنی اس شکل کے لئے جو منحنی $\text{ر}^2 = \text{ا}^2 \,\text{جم طہ}$ کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے سے پیدا ہوتی ہے ذیل کے خواص ثابت کرو

(۱) اس کا حجم $\frac{۴}{۱۵}\,\pi\,\text{ا}^3$ ہے۔

(۲) زیادہ سے زیادہ عرض ۰.۲۴۰۸ ا ہے مبدأ سے ۰.۴۳۸۹ ا فاصلہ پر

(۳) حجم کا اوسط مرکز قطب سے $\frac{۱۵}{۳۲}$ ا فاصلہ پر ہے۔

۲۰۔ کسی منحنی کا "قطبی زیر مماس" وہ طول ہے جو قطب میں سے گزرنے والے خط پر، جو سمتی نیم قطر پر عمود وار ہو، مماس کاٹتا ہے، ثابت کرو کہ اس کا طول $\text{ر}^2 \frac{\text{ف طہ}}{\text{ف ر}}$ ہے۔
ثابت کرو کہ متکافی لولب میں قطبی زیر مماس مستقل ہوتا ہے۔

۲۱۔ نیم قطر ا کا دائرہ ہے۔ ثابت کرو کہ اسکے دریچہ کی مماسی قطبی مساوات ہے
$\text{ع}^2 = \text{ر}^2 - \text{ا}^2$ جہاں مرکز قطب ہے۔

۲۲۔ ارشمیدس کے لولب (شکل ۱۱۱) میں ثابت کرو کہ $\text{ع}^2 = \frac{\text{ر}^4}{\text{ا}^2 + \text{ر}^2}$

۲۳۔ متکافی لولب (شکل ۹۷) میں ثابت کرو کہ $\frac{1}{\text{ع}^2} = \frac{1}{\text{ر}^2} + \frac{1}{\text{ا}^2}$

۲۴۔ منحنی $\text{ر} = \frac{\text{ا}}{\text{جم م طہ}}$ میں ثابت کرو کہ $\frac{1}{\text{ع}^2} = \frac{1 - \text{م}^2}{\text{ر}^2} + \frac{\text{م}^2}{\text{ا}^2}$

۲۵۔ ان منحنیات $\text{ر} = \frac{\text{ا}}{\text{جمز م طہ}}$، $\text{ر} = \frac{\text{ا}}{\text{جیبز م طہ}}$ میں ثابت کرو کہ بالترتیب

$$\frac{1}{\text{ع}^2} = \frac{1 + \text{م}^2}{\text{ر}^2} \mp \frac{\text{م}^2}{\text{ا}^2}$$

۳۳۰۔ ۲۶۔ برتدویر (دفعہ ۱۲۳) میں ثابت کرو کہ $\text{ر}^2 = \text{ا}^2 + \frac{۴(\text{ا}+\text{ب})\text{ب}}{(\text{ا}+۲\text{ب})^2}\,\text{ع}^2$
درتدویر کے لئے متناظر ضابطہ کیا ہے۔

۲۷۔ کارٹیزی مساوات اس منحنی کی دریافت کرو جسمیں $\text{ع} = \text{ا جب سا جم سا}$ $\left[\text{لا}^{\frac{2}{3}} + \text{ما}^{\frac{2}{3}} = \text{ا}^{\frac{2}{3}}\right]$

۲۸۔ اُس منحنی کی قطبی مساوات دریافت کرو جسمیں $ع^2 = \frac{۴ ر^6}{ا^4 + ۳ ر^4}$

۲۹۔ ایک منحنی کی مماسی قطبی مساوات دی ہوئی ہے، اسکی قوس کے لئے ضابطہ

$$س = \int \frac{ر\, فر\, ر}{\sqrt{ر^2 - ع^2}}$$ ثابت کرو۔

۳۰۔ ضابطہ $ع\, فرس = ر^2\, فرطہ$ ثابت کرو اور اسکی ہندسی تعبیر بیان کرو اِس لئے ثابت کرو کہ اگر وہ رقبہ جو کسی متحرک نقطہ کا سمتی نیم قطر عبور کرتا ہے وقت کے ساتھ یکساں طور پر بڑھے تو نقطہ کی رفتار اُس عمود کے بالعکس متناسب ہوگی جو مبدأ سے راستہ کے مماس پر کھینچا جائے۔

امثلہ ۴۵

مربوط منحنی۔ دو قطبی محدد

۱۔ مساوی الزاویہ لولب کا مقلوب بلحاظ قطب کے ایک مساوی لولب ہے۔

۲۔ قطع زائد کا مقلوب بلحاظ مرکز کے، مرکز پر ایک عقدہ رکھتا ہے۔

۳۔ قائم زائد کا مقلوب بلحاظ مرکز کے برنولی کا چشمہ منحنی ہے۔

۴۔ قطبی مساواتوں کے ذریعہ ثابت کرو کہ خط مستقیم کا مقلوب ایک دائرہ ہے جو تقلیب کے قطب میں سے گزرتا ہے اور برعکس اسکے۔

۵۔ قطبی مساوات کے مدد سے ثابت کرو کہ دائرہ کا مقلوب دائرہ ہے۔

۶۔ قطع مکافی کا مقلوب بلحاظ ماسکہ کے خط صنوبری ہے۔
کسی مخروطی کا مقلوب بلحاظ ماسکہ کے گھونگا منحنی ہے۔

۷۔ ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کا مقلوب بلحاظ مرکز کے منحنی

$$(لا^2 + ما^2)^2 = م^4 \left(\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2}\right)$$ ہے۔

نیز ثابت کرو کہ جہاں منحنی محور رما کو کاٹتا ہے وہاں پر منحنی مبدأ کی جانب مقعر یا محدب ہوگا بموجب اسکے کہ ب² ≷ ۲ ا² ۔

۸ ۔ خط صنوبری قطع مکافی کا مقلوب ہے بلحاظ ماسکہ کے۔ اس امر کو استعمال کرنے سے یا کسی اور طرح سے ثابت کرو کہ قرن میں سے گذرنے والے کسی وتر کے سروں پر کے عماد ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں اور ان کے تقاطع کو قرن کے ساتھ ملانیوالا خط وتر پر عمود وار ہوتا ہے۔

۹ ۔ تقلیب سے یا کسی اور طرح سے ثابت کرو کہ صنوبری خطوط ر = ا (۱ + جم طہ)، ر = ب (۱ - جم طہ) ایک دوسرے کو علی القوائم کاٹتے ہیں۔

۱۰ ۔ منحنی اور اسکے مقلوب کے متناظر عنصر فرس، فرسَ ہیں، ثابت کرو کہ فرس : فرسَ = ر² : م² = م'² : رَ² جہاں ر، رَ سمتی نیم قطر ہیں۔

۱۱ ۔ قطع مکافی کا پایئں منحنی بلحاظ راس کے لبلابی خط (Cissoid) [دفعہ ۱۱۹ (۱۶)] ہے۔

۱۲ ۔ اگر ایک منحنی کے دو مماس ایک دوسرے سے مستقل زاویہ بنائیں تو ان کے نقطہ تقاطع (پ) کا طریق پ اور دو نقاط تماس میں سے گذرنے والے دائرہ کو مس کرتا ہے۔

۱۳ ۔ ثابت کرو کہ پایئں منحنی کا رقبہ اس ضابطہ ½ ∫ ع² فرسا سے حاصل ہوتا ہے

۱۴ ۔ ثابت کرو کہ پایئں کی قوس اس ضابطہ ∫ ر فرسا سے حاصل ہوتی ہے۔

۱۵ ۔ قطع ناقص کے پایئں منحنی کا رقبہ ہے ½ π (ا² + ب²) جبکہ مرکز قطب ہو اور ا، ب نیم محور ہوں۔

۱۶ ۔ قطع زائد $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کا پایئں منحنی بلحاظ مرکز کے دو حلقوں پر مشتمل ہے جن میں سے ہر ایک کا رقبہ ½ ا ب + ½ (ا² - ب²) مس⁻¹ $\frac{ا}{ب}$ ہے۔

۱۷ ۔ اگر (قائم) محددوں کے مبدأ سے اور نقطہ (لا، ما) سے منحنی کے مماس پر عمود ع اور عَ کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ

ع = ع۱ - لا۱ جم سا - ما۱ جب سا

جہاں سا عمودوں کا میلان ہے محور لا کے ساتھ۔

۱۸ — ایک بند بیضوی منحنی کے دو پائیں منحنی بلحاظ مبدا و اور ایک نقطہ (لا۱، ما۱) کے ہیں جبکہ یہ دونوں نقطے منحنی کے اندر واقع ہیں۔ ان پائیں منحنیوں کے رقبے ا، ا۱ ہیں، ثابت کرو کہ ۴۴۲

ا۱ = ا - لا۱ $\int_{0}^{2\pi}$ ع جم سا فر سا - ما۱ $\int_{0}^{2\pi}$ ع جب سا فر سا + $\frac{1}{2}$ π (لا۱^2 + ما۱^2)

۱۹ — ایک نقطہ کو قطب مانکر اگر ایک بند بیضوی منحنی کا پائیں منحنی لیا جائے تو اس کا رقبہ مستقل ہوتا ہے، ثابت کرو کہ نقطہ مذکورہ کا طریق دائرہ ہے۔ اور مستقل کی مختلف قیمتوں کے جواب میں جو دائرے حاصل ہوتے ہیں وہ ہم مرکز ہیں۔

نیز اگر و مشترک مرکز ہو تو بلحاظ کسی اور نقطہ پ کے جو پائیں منحنی حاصل ہوتا ہے اُس کا رقبہ اُس پائیں منحنی کے رقبہ سے جو بلحاظ و کے لیا جائے بقدر دائرہ (نیم قطر وپ) کے رقبہ کے زیادہ ہوتا ہے۔

۲۰ — مکافی ما^2 = ۴ ا لا کا منفی پائیں بلحاظ راس کے منحنی

۲۷ ا ما^2 = (لا - ۴ ا)^3 ہے۔

۲۱ — کس صورت میں ع = ا جم سا؟

۲۲ — ثابت کرو کہ جس منحنی کی صورت میں ع = ا جب سا جم سا وہ ستارہ نما

لا$^{2/3}$ + ما$^{2/3}$ = ا$^{2/3}$ ہے۔

۲۳ — بتاؤ کہ مساوات ر^2 + رَ^{2} = م^2 (مستقل) کو بلحاظ قوس (س) کے تفرق کرنے سے کیا خاصیت حاصل ہوتی ہے اور نتیجہ کی ہندسی طریق پر تصدیق کرو۔

۲۴ — کینینیی کے بیضوی کے کسی نقطہ پ پر عماد کھینچنے کا یہ عمل ثابت کرو۔
پ س اور پ سَ میں بالترتیب نقطے ق اور قَ لو ایسے کہ پ ق = پ سَ اور پ قَ = پ س۔ جو خط پ کو ق قَ کے وسطی نقطہ کے ساتھ ملاتا ہے وہ مطلوبہ عماد ہے۔

۲۵ - متوازی شعاعوں کا ایک نظام اس طور پر منعکس ہونا مطلوب ہے کہ یہ ایک ثابت نقطہ میں سے گذرے، ثابت کرو کہ انعکاسی منحنی قطع مکافی ہے۔

۲۶ - متوازی شعاعوں کا ایک نظام اس طور پر منعطف ہونا مقصود ہے کہ انعطاف کے بعد شعاعیں ایک ثابت نقطہ میں سے گذریں۔ ثابت کرو کہ انعطافی منحنی ایک مخروطی تراش ہے اور مخروطی کا خروج المرکز انعطاف نماؤں کی نسبت کے مساوی ہے۔

۲۷ - ثابت کرو کہ کارٹیزی بیضوی کی مساوات اس شکل کی ہے

$$ر^{2} - ۲\,(ا + ب\ جم\ طہ)\,ر + ج^{2} = ۰$$

جہاں کسی ماسکہ کو قطب مانا گیا ہے۔

۲۸ - ثابت کرو کہ کارٹیزی بیضوی لازماً ایک بند منحنی ہوگا اگر اُس صورت کو جس میں منحنی قطع زائد کی ایک شاخ ہے مستثنیٰ کر دیا جائے۔

دسواں باب

انحنا

۳۳۳

۳۳۳ا۔ انحنا کا ناپ ۔ مستوی منحنیات کے نظریہ میں احصا کا جو استعمال ہے اس کے متعلق اب تک ہمیں منحنی کے مختلف نقاط پر مماس کی سمت کے ساتھ ہی سروکار رہا ہے، ابھی خاص طور پر ہم نے اس پر غور نہیں کیا کہ کس طرح نقطہ بہ نقطہ یہ سمت منحنی پر بدلتی ہے۔

انحنا کا مضمون کئی غیر متعلق پہلوؤں سے بحث میں لایا جا سکتا ہے اور اگرچہ تمام طریقوں سے بالکل وہی ضابطے حاصل ہوتے ہیں تاہم طالب علم کے لئے یہ دیکھنا ضروری ہے کہ اساسی طور پر استدلال میں وہ ایک دوسرے سے بالکل مختلف ہیں۔

* پہلے طریقہ میں ہم منحنی کی کسی قوس کے "پورے" یا "مکمل" انحنا کی تعریف سے ابتدا کرتے ہیں، پورا انحنا وہ زاویہ مف سا ہے جس میں سے مماس گھوم جاتا ہے جبکہ اس کا نقطہ تماس قوس کے ایک سرے سے دوسرے سرے تک سفر کرتا ہے۔

اور قوس کا "اوسط انحنا" اُس نسبت سے متعین ہوتا ہے جو پورے انحنا کو قوس کے طول (مف س) کے ساتھ ہو پس اس تعریف کے مطابق اوسط انحنا $\frac{\text{مف سا}}{\text{مف س}}$ ہے۔

* اور طریقے دفعات ۱۳۶، ۱۳۷ میں بیان کئے گئے ہیں۔

اور تعریف کے طور پر منحنی کے "کسی نقطہ پ پر کا انحنا" اس لا انتہا چھوٹی قوس کا اوسط انحنا خیال کیا جاتا ہے جو اس نقطہ پر منتہی ہوتی ہے۔ پس احصا کی ترقیم کے مطابق کسی نقطہ پر کا انحنا

$$\frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$ سے تعبیر ہوگا۔

ایک دائرہ کیلئے جس کا نیم قطر ر ہو مف س = ر مف سا

اور اس لئے $\frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}} = \frac{۱}{ر}$ جس سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک دائرہ کا انحنا اس کے نیم قطر کے مقلوب سے ناپا جاتا ہے۔ پس اگر ایک دائرہ کا نیم قطر ر ہو جس کا انحنا وہی ہے جو کسی دئے ہوئے منحنی کا نقطہ پ پر ہے تو

$$ر = \frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

۳۴۴ اس نیم قطر (ر) کے دائرہ کو جس کا مماس نقطہ پ پر وہی ہو اور جس کا قعر اُسی سمت میں ہو جو اصلی منحنی کا ہے ہم "دائرہ انحنا" کہینگے، اس کے نیم قطر کو "نیم قطر انحنا" کہا جائیگا اور اس کے مرکز کو "انحنا کا مرکز"۔

اگر منحنی کے نقطہ پ سے کسی خاص سمت میں ایک خط مستقیم کھینچا جائے تو اس خط پر جو طول یہ دائرہ قطع کرتا ہے اُسے اس سمت میں کے "وتر انحنا" کے نام سے موسوم کیا جائیگا۔ اگر وتر کی سمت عماد کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو وتر کا طول ل اس مساوات سے حاصل ہوگا

$$ل = ۲ ر جم طہ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

اگر انحنا کے مرکز کے قائم محدد (ضا، عا) ہوں تو قائم ظل ڈالنے سے

$$ضا = لا - ر جب سا، \quad عا = ما + ر جم سا \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

بشرطیکہ سا کا صفر اُس مقام سے شروع ہو جہاں مماس لا کے محور کے متوازی ہوتا ہے۔

انحنا کا مرکز منحنی کے دو متصل عمادوں کا نقطہ تقاطع ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ

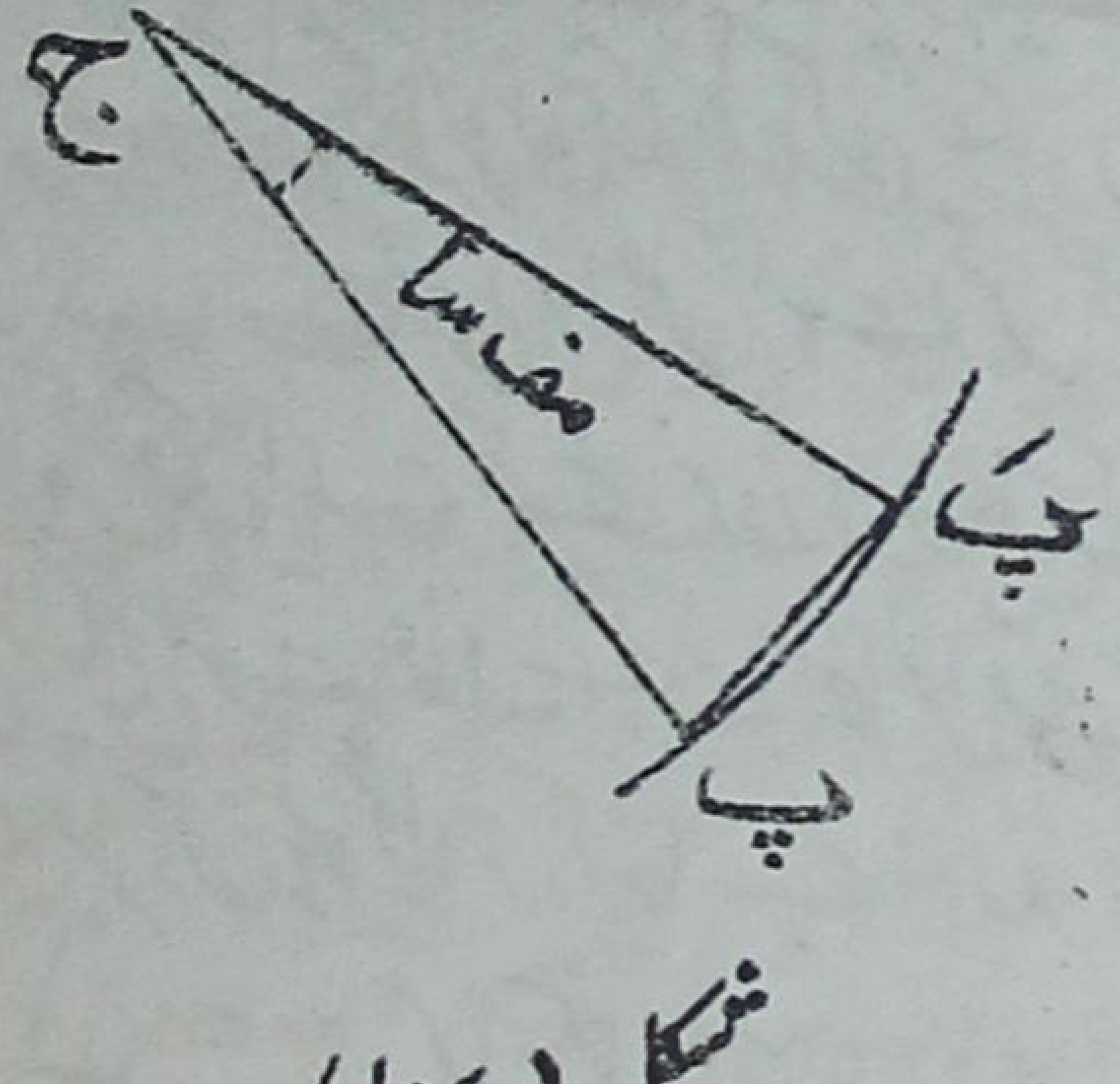
منحنی کے دو متصل نقاط پر پ ج، پَ ج دو عماد ہیں اور ان کے درمیان زاویہ مف سا ہے اور قوس پ پَ مف س ہے، تب وتر پ پَ کھینچنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ (شکل ۱۰۷)

$$\frac{\text{ج پ}}{\text{پ پَ}} = \frac{\text{جب ج پَ پ}}{\text{جب مف سا}}$$

$$\text{یا ج پ} = \text{جب ج پَ پ} \times \frac{\text{پ پَ}}{\text{مف س}} \times \frac{\text{مف سا}}{\text{جب مف سا}} \times \frac{\text{مف س}}{\text{مف سا}}$$

جب، پَ کو پ کے لاانتہا قریب لیا جائے تو بائیں جانب کے ہر جزو ضربی کی انتہا ایک ہوتی ہے سوائے $\frac{\text{مف س}}{\text{مف سا}}$ کی انتہا کے۔ پس آخر الامر

$$\text{ج پ} = \frac{\text{فر س}}{\text{فر سا}} = \text{ر}$$



شکل (۱۰۷)

جدید ہندسہ میں ہم یوں خیال کرتے ہیں کہ منحنی کی تکوین دو طرح سے عمل میں آتی ہے ایک تو یہ ایک نقطہ کا طریق ہو سکتا ہے دوسرے یہ ایک خط مستقیم کا لفاف ہو سکتا ہے (دفعہ ۱۴۱)۔ حرکت کے اُن متعلق عنصروں کے کسی مسلسل

تواتر پر غور کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ خط مستقیم کسی آن میں، نقطہ کے گرد حرکت کر رہا ہے اور یہ نقطہ خط مستقیم پر سفر کر رہا ہے اور انحنا $\frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}}$ ان دو حرکتوں کے باہمی رشتہ کو بیان کرتا ہے۔

اگر کسی نقطہ پر انحنا صفر ہے تو مماس کا گھماؤ ایک لمحہ کے لئے رک جاتا ہے اور "ساکن یا اچل مماس" کی صورت پیدا ہوتی ہے۔ اسکی سادہ ترین مثال "نقطہ انعطاف" کی ہے (دفعہ ۶۷) جہاں پر مماس کے گھماؤ کی سمت، رکنے کے بعد، الٹ جاتی ہے۔

اگر کسی نقطہ پر نیم قطر انحنا ($\frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}}$) صفر ہو جائے تو نقطہ کی حرکت ۳۳۵
خط مستقیم پر ایک لمحہ کے لئے رک جاتی ہے اور "ساکن یا اچل نقطہ" پیدا ہوتا ہے۔ اس کی سادہ مثال ایک "قرن" ہے جیسا ہم نے اشکال ۷۰، ۴۴، ۷۹، ۸۳ وغیرہ میں دیکھا ہے۔ ایسی صورتوں میں نقطہ کی حرکت کی سمت رکنے کے بعد الٹ جاتی ہے۔ دفعہ ۱۱۹ کی مثالوں میں ہم نے دیکھا تھا کہ قرن ایک حلقہ کے معدوم ہونے سے پیدا ہوتا ہے۔ یہ اس امر کو دیکھنے کا ایک اور طریقہ ہے کہ نصف قطر انحنا کو یہاں پر کیوں صفر ہونا چاہئے۔

علم حرکت اور طبعیات کے مسائل میں انحنا کا تخیل بہت اہمیت رکھتا ہے، مثلاً علم حرکت میں اگر ایک متحرک ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کو بالترتیب دو اجزا میں تحلیل کیا جائے ایک مماس کی سمت میں اور دوسرے عماد کی سمت میں تو پہلا جزو رفتار پر اثر رکھتا ہے اور دوسرا حرکت کی سمت پر۔ اگر ایک ثابت مبدأ سے وص سمتی (Vector) کھینچا جائے جو کسی آن میں ذرہ کی رفتار کو تعبیر کرے تو ص کے قطبی محدد ع اور سا لئے جا سکتے ہیں جہاں ع = $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$ اس طرح ص کی قطری اور عمودی رفتاریں بالترتیب ہونگی (دفعہ ۱۱۲ (۶))

$\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}}$ اور ع $\frac{\text{فرسا}}{\text{فرت}}$ .... (۵)

اور یہ رفتار ین تغیر کی شرحیں ہیں ذرہ کے مدار کے مماس اور عماد کی سمت میں

اور چونکہ $ع \frac{\text{فرسا}}{\text{فرت}} = ع \frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \frac{ع^2}{ر}$ ....(۶)

یہ آخر کا جزو ترکیبی، رفتار کے مربع اور انحنا کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

۱۳۴۔ منحنی کی ذاتی مساوات۔ ضابطہ $ر = \frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}}$ فوراً لگ سکتا ہے اگر منحنی زیر بحث کے لئے س اور سا کا باہمی رشتہ اس شکل میں معلوم ہو

$$س = ف(سا) \quad ....(۲)$$

یہ منحنی کی "ذاتی مساوات" کہلاتی ہے کیونکہ اسکی شکل میں منحنی کے باہر کے مکانی عنصر شریک نہیں ہوتے۔ اس میں اختیاری عنصر صرف س کا مبدأ اور سا کا مبدأ ہیں اور ان میں سے کسی ایک میں تبدیلی کا اثر صرف یہ ہوگا کہ متناظر تغیر میں ایک مستقل کا اضافہ ہو جائیگا۔

اگر منحنی کی ذاتی مساوات معلوم نہ ہو تو دفعہ ۱۳۵ کا کوئی ایک ضابطہ استعمال ہو سکتا ہے یا خاص صورتوں میں خاص ترکیبیں عمل میں لائی جاسکتی ہیں دیکھو ذیل کی مثالیں ۴ اور ۵۔

مثال ۱۔ زنجیرہ میں ۲۲۶

$$س = ا س سا \quad ....(۳)$$

جس سے $ر = ا \text{ قط}^2 سا = ما \text{ قط } سا$ ....(۴)

دفعہ ۱۲۰ کی ترقیم کے موافق۔ اس دفعہ کی شکل کے حوالہ سے معلوم ہوگا کہ نیم قطر انحنا عماد پ گ کے مساوی ہے۔

مثال ۲۔ خط تدویر (cycloid) (دفعہ ۱۲۲) میں

$$س = ۴ ا \text{ جب } سا \quad ....(۵)$$

اور اس لئے $ر = ۴ ا \text{ جم } سا$ ....(۶)

اس لئے شکل ۹۷ میں ر = ۲ پ ے یعنی انحنا کا نیم قطر عماد کا دو چند ہے۔

مثال ۳- برندویر (Epicycloid.) دفعہ ۱۲۳ (۱۱) میں

$$\text{س} = \frac{\text{۴ (ا + ب) ب}}{\text{ا}} \ \text{جب} \ \frac{\text{ا}}{\text{ا + ۲ب}} \ \text{سا} \ \ldots\ldots \ (\text{۷})$$

اور اس لئے $\text{ر} = \frac{\text{۴ (ا + ب) ب}}{\text{ا + ۲ ب}} \ \text{جم} \ \frac{\text{ا}}{\text{ا + ۲ب}} \ \text{سا}$

$$= \frac{\text{۴ (ا + ب) ب}}{\text{ا + ۲ ب}} \ \text{جم} \ \frac{\text{فہ}}{\text{۲}} \ \ldots\ldots \ (\text{۸})$$

اس لئے شکل ۸۱ (دفعہ ۱۲۳) کے حوالہ سے ظاہر ہے کہ

$$\text{ر} = \frac{\text{۲ (ا + ب)}}{\text{ا + ۲ ب}} \ \text{پ ہے} \ \ldots\ldots \ (\text{۹})$$

جہاں پ ہے عماد کا طول ہے مرتسم نقطہ اور ثابت دائرہ کے درمیان۔

مثال ۴- مکانی $\text{ما}^{۲} = \text{۴ا لا}$ میں $\text{ما} = \text{۲ا مم سا}$ .... (۱۰)

جس سے $\text{جب سا} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} = - \frac{\text{۲ا}}{\text{جب}^{۲}\text{سا}} \ \frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}}$

$$\text{یا} \ \ \text{ر} = - \frac{\text{۲ا}}{\text{جب}^{۳}\text{سا}} \ \ldots\ldots \ (\text{۱۱})$$

منفی علامت کا یہ مفہوم ہے کہ سا گھٹتا ہے جیسے س بڑھتا ہے۔

مثال ۵- اگر قطع ناقص لا = ا جم فہ، ما = ب جب فہ ...... (۱۲)

کو دائرہ لا = ا جم فہ، ما = ا جب فہ .... (۱۳)

کا قائم ظل تصور کیا جائے تو $\frac{\text{فرس}}{\text{فرفہ}} = \text{بہ}$ .... (۱۴)

جہاں بہ فردوج نیم قطر ہے۔ کیونکہ قوس کا عنصر ا مف فہ سے بدلکر مف س ۳۳۷
ہو جاتا ہے اور متوازی نیم قطر ا سے بدلکر بہ ہو جاتا ہے۔ نیز چونکہ $\frac{۱}{۲}\text{بہ}^{۲}$ مف سا
اور $\frac{۱}{۲}\text{ا}^{۲}$ مف فہ رقبہ کے متناظر عنصر ہیں اس لئے

$$\text{بہ}^{۲}\ \text{مف سا} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\ \text{ا}^{۲}\ \text{مف فہ}$$

یا $\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرسا}} = \frac{\text{بہ}^2}{\text{ا ب}}$ .... (۱۵)

اسلئے $ر = \frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرفہ}} \times \frac{\text{فرفہ}}{\text{فرسا}} = \frac{\text{بہ}^3}{\text{اب}}$ .... (۱۶)

اگر مماسی خط پر مرکز سے عمود ع ہو تو ع بہ = ا ب اور اوپر کا نتیجہ اس طور پر لکھا جا سکتا ہے

$ر = \frac{\text{بہ}^2}{\text{ع}}$ یا $ر = \frac{\text{ا}^2\text{ب}^2}{\text{ع}^3}$ .... (۱۷)

چونکہ $\text{ع}^2 = \text{ا}^2\text{جم}^2\text{سا} + \text{ب}^2\text{جب}^2\text{سا} = \text{ا}^2(\text{ا} - \text{ز}^2\text{جب}^2\text{سا})$

موخر الذکر صورت اس شکل کے معادل ہے (ز خروج المرکز ہے)

$ر = \text{ا}\frac{\text{ا} - \text{ز}^2}{(\text{ا} - \text{ز}^2\text{جب}^2\text{سا})^{\frac{3}{2}}}$ .... (۱۸)

اس ضابطہ سے ارضیات (Geodesy) میں ایک مشہور نتیجہ حاصل ہوتا ہے اگر زمین کی شکل کو گردش کا ناقص نما خیال کیا جائے تو ز^4 کو نظر انداز کرنے سے عرض بلد سا کی رقوم میں نیم قطر انحنا کے لئے جملہ حاصل ہوتا ہے

$\frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}} = \text{ا}(\text{ا} - \text{ز}^2 + \frac{3}{2}\text{ز}^2\text{جب}^2\text{سا}) = \text{ا}(\text{ا} - \frac{\text{صہ}}{2} - \frac{3}{2}\text{صہ جم ۲سا})$ .... (۱۹)

جہاں $\text{صہ} = \frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ا}} = \frac{1}{2}\text{ز}^2$ یعنی صہ سے نصف النہار کی ناقصیت (Ellipticity) تعبیر ہوتی ہے، (۱۹) کو تکمل کرنے سے نصف النہار کی قوس کا طول، استواء سے عرض بلد سا تک حاصل ہوتا ہے

$\text{س} = \text{ا}(\text{ا} - \frac{\text{صہ}}{2})\text{سا} - \frac{3}{4}\text{ا صہ جب ۲سا}$ ..... (۲۰)

مثال ۶ - مساوی الزاویہ لولبی (دفعہ ۱۲۶) میں

$$\text{سا} = \text{طہ} + \text{عہ} \qquad \ldots\ldots (۲۱)$$

اس سے $\dfrac{\text{فرسا}}{\text{فرس}} = \dfrac{\text{فرطہ}}{\text{فرس}} = \dfrac{\text{جب عہ}}{\text{ر}}$

$$\text{یا}\quad \text{ر} = \frac{\text{ر}}{\text{جب عہ}} \qquad \ldots\ldots (۲۲)$$

پس نیم قطر انحنا کے سامنے مبدأ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

۱۳۵۔ نیم قطر انحنا کے لئے ضابطے۔ انحنا کا ضابطہ $\dfrac{\text{فرسا}}{\text{فرس}}$ آسانی سے کئی اور صورتوں میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

(۱) قائم کارٹیزی محددوں میں

$$\text{مس سا} = \frac{\text{فرحا}}{\text{فرلا}} \qquad \ldots\ldots (۱)$$

۳۳۸ اسلئے $\text{قط}^2\,\text{سا}\,\dfrac{\text{فرسا}}{\text{فرس}} = \dfrac{\text{فر}}{\text{فرس}}\left(\dfrac{\text{فرحا}}{\text{فرلا}}\right) = \dfrac{\text{فر}^2\text{حا}}{\text{فرلا}^2}\cdot\dfrac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = \text{جم سا}\,\dfrac{\text{فر}^2\text{حا}}{\text{فرلا}^2}$

جس سے $$\frac{1}{\text{ر}} = \frac{\dfrac{\text{فر}^2\text{حا}}{\text{فرلا}^2}}{\left\{1+\left(\dfrac{\text{فرحا}}{\text{فرلا}}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \qquad \ldots\ldots (۲)$$

اس شکل سے پھر ظاہر ہے کہ نقطہ انعطاف پر، جہاں $\dfrac{\text{فر}^2\text{حا}}{\text{فرلا}^2} = 0$ (دفعہ ۶۷) انحنا صفر ہوتا ہے۔

جب، $\dfrac{\text{فرحا}}{\text{فرلا}}$ ایک چھوٹی مقدار ہو تو ضابطہ (۲) سے حاصل ہوتا ہے تقریباً

$$\frac{1}{\text{ر}} = \frac{\text{فر}^2\text{حا}}{\text{فرلا}^2} \qquad \ldots\ldots (۳)$$

اور تناسبی خطا اہمیں دوسرے رتبہ کی ہوگی۔ صریحاً یہ ضابطہ $\frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}}$

کی نقل ہے کیونکہ جب، سا چھوٹا ہو تو سا کی بجائے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ (= مس سا)

لکھا جاسکتا ہے اور $\frac{\text{فر}}{\text{فرس}}$ کی بجائے $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$۔ سلاخوں کی خمیدگی کے

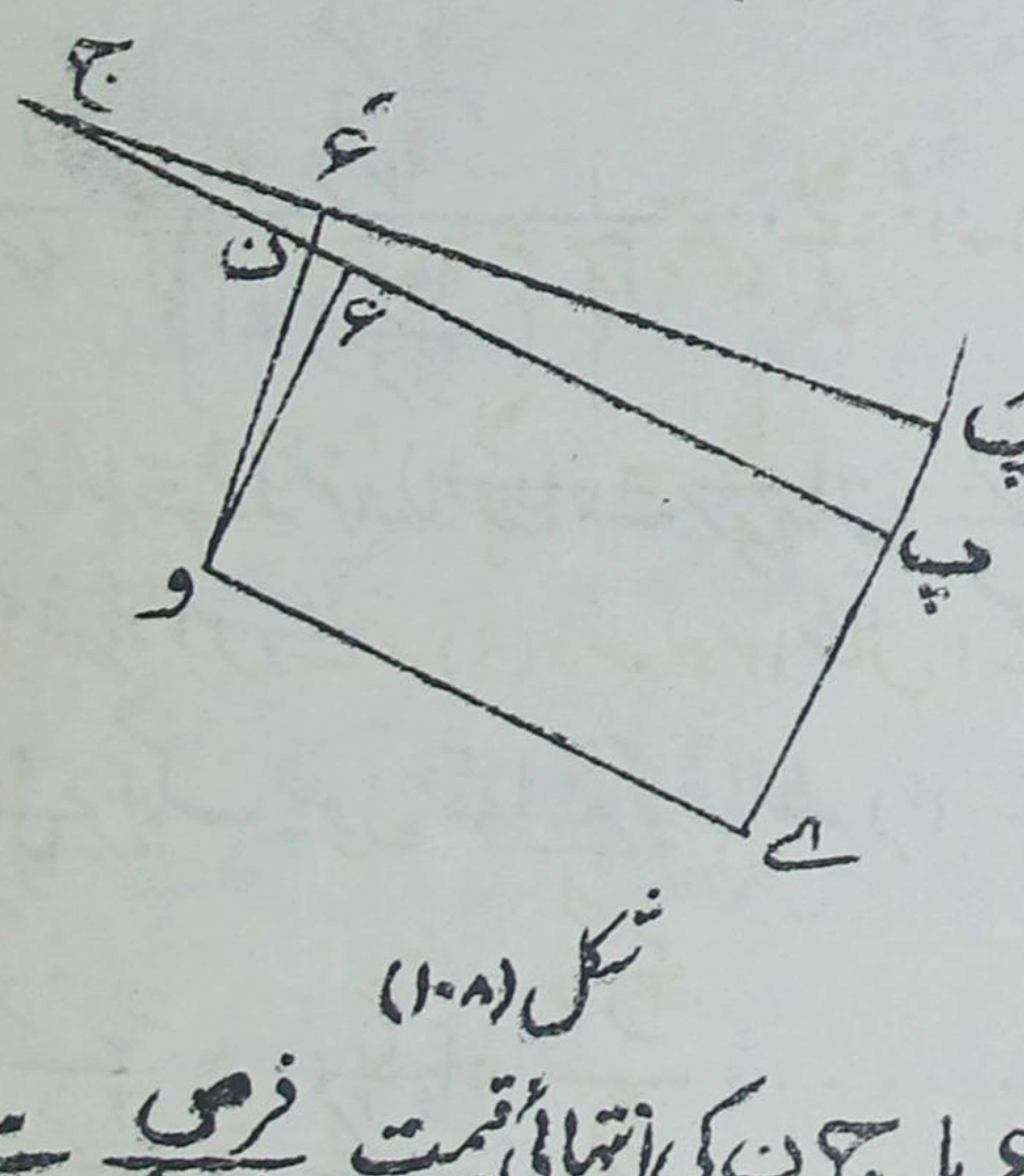
نظریہ میں اس ضابطہ کا استعمال بہت اہمیت رکھتا ہے۔

(۲) دفعہ ۱۳۱ میں یہ ثابت کیا گیا تھا کہ نیم قطر کا ظل (ص) مماسس پر حاصل ہوتا ہے

$$\text{ص} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرسا}} \qquad \text{..........} (۴)$$

اگر مبدأ سے دو متصل عمادوں پ ج، پَ جَ پر عمود و ع، و عَ ہوں اور اگر و عَ پ ج سے ن پر ملے تو بالآخر

و عَ - و ع = عَ ن = جَ ن مف سا یا مف ص = جَ ن مف سا



شکل (۱۰۸)

۲۳۹ اس لئے ج ع یا جَ ن کی انتہائی قیمت $\frac{\text{فرص}}{\text{فرسا}}$ ہے جس سے

$$\text{ر} = \text{جج پ} = \text{وے} + \text{جع ع} = \text{ع} + \frac{\text{فرص}}{\text{فرسا}} = \text{ع} + \frac{\text{فر}^{۲}\text{ع}}{\text{فرسا}^{۲}} \quad \ldots\ldots (۵)$$

(۳) دفعہ ۱۱۲ کی ترقیم کے موافق

$$\frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \text{جمم فما} = \frac{\text{فرر}}{\text{فرس}} \quad \ldots\ldots (۶)$$

چونکہ $\frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرر}} \times \frac{\text{فرر}}{\text{فرع}}$ ، $\frac{\text{فرع}}{\text{فرسا}} = \text{ص} \, \frac{\text{فرس}}{\text{فرر}} \times \frac{\text{فرر}}{\text{فرع}}$

اس سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{ر} = \frac{\text{ر فرر}}{\text{فرع}} \quad \ldots\ldots (۷)$$

یہ ضابطہ بڑی سہولت سے استعمال ہو سکتا ہے جب مماسی قطبی مساوات (دفعہ ۱۲۹) معلوم ہو۔

مثال ۱۔ زنجیرہ $\text{ما} = \text{ا جمز} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} \quad \ldots\ldots (۸)$

کی صورت میں

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{جبز} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} ،\quad \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} = \frac{۱}{\text{ا}} \text{جمز} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} ،\quad ۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{۲} = \text{جمز}^{۲} \frac{\text{لا}}{\text{ا}}$$

اس لئے $\text{ر} = \text{ا جمز}^{۲} \left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right) = \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ا}} \quad \ldots\ldots (۹)$

چونکہ ما = ا قطسا، اس لئے نتیجہ (۹) دفعہ ۱۳۴ مثال ۱ کے مطابق ہے۔

مثال ۲۔ مکانی میں $\text{ر} = \frac{\text{ع}^{۲}}{\text{ا}} \quad \ldots\ldots (۱۰)$

$$\text{ر} = \frac{\text{ر فرر}}{\text{فرع}} = \frac{۲\text{ع}^{۲}}{\text{ا}} = \frac{۲\text{ر}^{\frac{۳}{۲}}}{\text{ا}^{\frac{۱}{۲}}} \quad \ldots\ldots (۱۱)$$

مثال ۳۔ مرکزدار تراشوں میں (دفعہ ۱۲۹، مثال ۴)

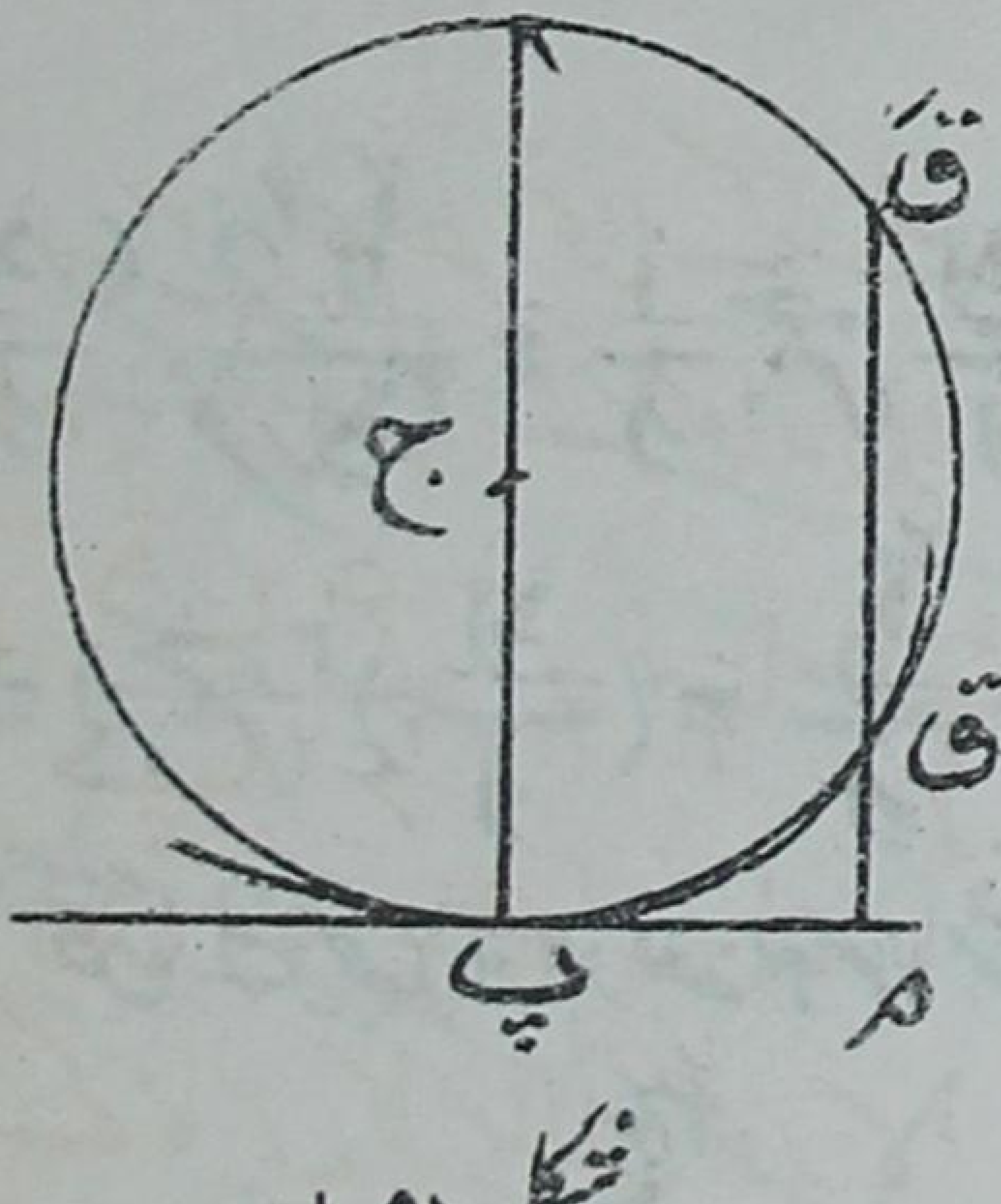
$$\frac{ا^2 ب^2}{ع^2} = ب^2 \pm ا^2 \mp ر^2 \quad \text{............} \quad (۱۲)$$

اس لئے $ر = \pm \frac{ا^2 ب^2}{ع^3}$ .... (۱۳)

مقابلہ کرو دفعہ ۱۳۴ مثال ۵ ۔

۱۳۶ ۔ نیوٹن کا طریقہ ۔ انحنا پر بحث کرنے کا ایک اور طریقہ ہے جسے نیوٹن* نے استعمال کیا ۔ اس میں ایک دائرہ کھینچا جاتا ہے جو منحنی کو پ پر مس کرتا ہے اور ایک پاس کے نقطہ ق میں سے گذرتا ہے ۔ اس کے بعد اس دائرہ کے نیم قطر کی انتہائی قیمت معلوم کیجاتی ہے جبکہ ق، پ کے لاانتہا قریب آجائے ۔

یہ بآسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ انتہا میں یہ دائرہ بالکل وہی ہے جو پ پر کا ۳۴
انحنا کا دائرہ ہے اور جس کی تعریف دفعہ ۱۳۳ میں کی گئی ہے



شکل (۱۰۹)

کیونکہ اگر ج مرکز ہو تو ج پ = ج ق اور اس لئے پ اور ق کے

* Principia, lib I, prop VI Cor 3.

درمیان کوئی نقطہ پ ایسا ضرور ہوگا کہ اس کا فاصلہ ج سے اعظم یا اقل ہو اور اسلئے* ایسا کہ ج پ منحنی کا عماد ہو۔ انتہا میں پ' پ کے لا انتہا قریب آجاتا ہے اور ج متصل عمادوں کا نقطہ تقاطع "مرکز انحنا" پر منطبق ہوتا ہے

نیوٹن کے طریقہ سے نیم قطر انحنا کے لئے ایک نہایت سادہ ضابطہ حاصل ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ پ پر کے مماس پر ق' ق م ایک عمود کھینچا گیا ہے جو دائرہ سے پھر ق' پر اور مماس سے م پر ملتا ہے۔ چونکہ

$$\text{م پ}^2 = \text{م ق} \times \text{م ق'}$$ اس لئے

$$\text{۲ ر} = \text{نہا م ق'} = \text{نہا} \frac{\text{م پ}^2}{\text{م ق}} \quad \ldots\ldots(۱)$$

اگر ق' ق م کو اس طور پر کھینچا جائے کہ یہ پ پر کے عماد کے متوازی ہونے کی بجائے اس عماد کے ساتھ ایک معلومہ میلان رکھے تو کسر (۱) کی انتہائی قیمت سے مائل سمت میں وتر انحنا حاصل ہوگا۔ بعض اوقات ایسا ہوتا ہے کہ کسی خاص سمت میں وتر انحنا خاص سہولت کے ساتھ معلوم ہو سکتا ہے، اس کے بعد نیم قطر انحنا ضابطہ (۳) دفعہ ۱۳۳ سے حاصل ہو سکیگا۔

مثلاً کارٹیزی محددوں میں نیم قطر انحنا کے لئے ضابطہ مستنبط ہو سکتا ہے بحوالہ شکل ۴۲ صفحہ (۲۱۲) محور ما کے متوازی وتر انحنا کو ق سے تعبیر کرو

$$\text{تو} \quad \frac{۱}{\text{ق}} = \text{نہا} \frac{\text{ق ع}}{\text{پ ع}^2} = \text{نہا} \frac{\text{قا}}{\text{اح}^2} \text{جم}^2 \text{سا}$$

$$= \tfrac{۱}{۲} \, \text{فتا(ل)} \, \text{جم}^2 \text{سا} \quad \ldots\ldots(۲)$$

جہاں سا، پ پر کے مماس کا میلان محور لا کے ساتھ ہے۔

چونکہ ق = ۲ ر جم سا، مس سا = فتا(ل)

اس لئے حاصل ہوتا ہے کہ

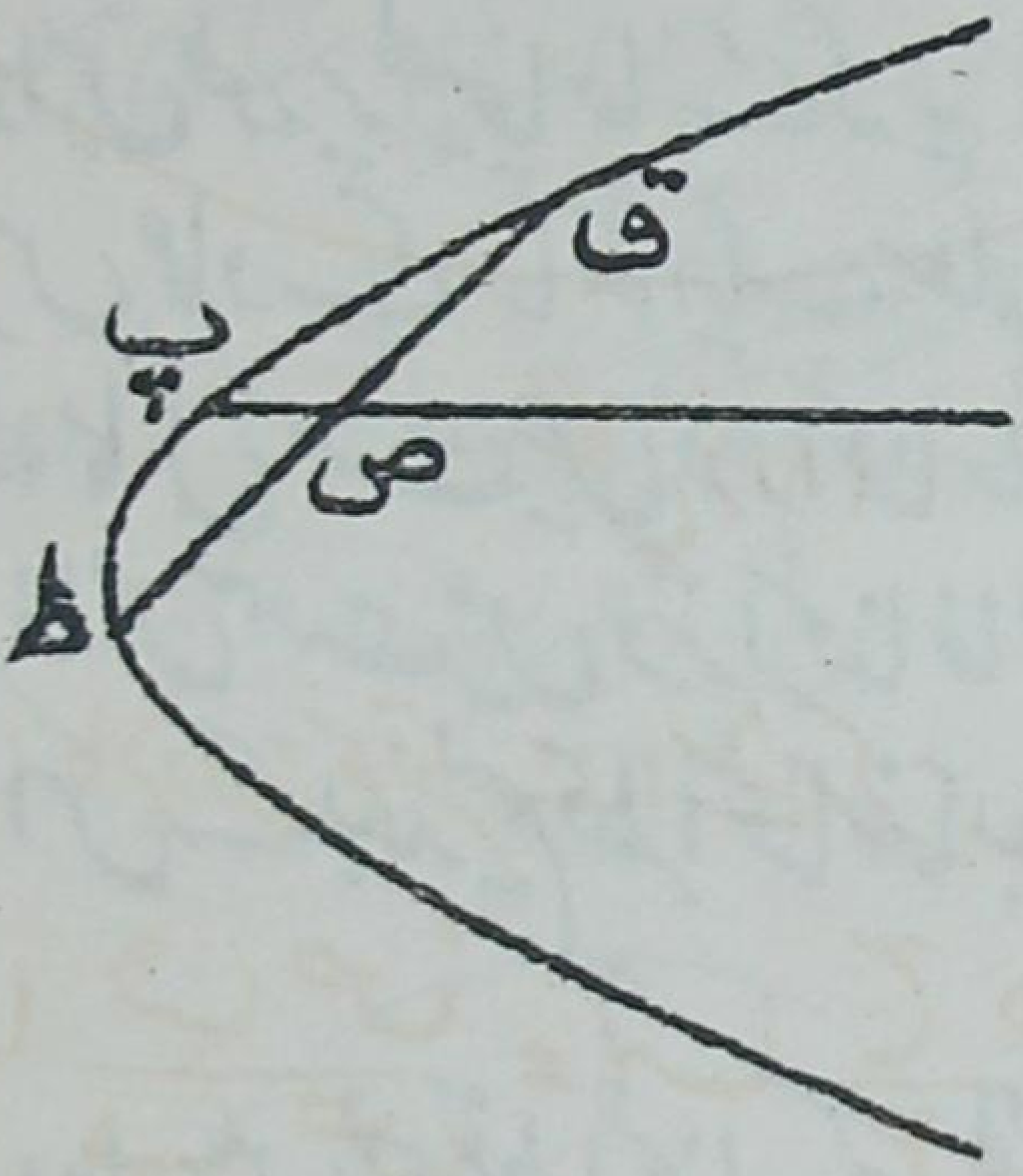
* دیکھو دفعہ ۶۳ مثال ۲۔

$$\frac{1}{\text{ر}} = \text{فَہَ(لا) جم}^{3}\,\text{سا} = \frac{\text{فَہً(لا)}}{\left[1+\left\{\text{فَہَ(لا)}\right\}^{2}\right]^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots (3)$$

اور یہ ضابطہ (۲) دفعہ ۱۲۵ کے بالکل مطابق ہے، صرف ترقیم کا فرق ہے۔

۳۴۱ مثال ۱۔ قطع ناقص میں فرض کرو کہ وتر ق ط، پ پر کے مماس کے متوازی ہے اور پ میں سے گذرنے والے قطر سے ص پر ملتا ہے (شکل ۱۱۰) منحنی کے ہندسہ کی رو سے

$$\text{ق ص}^{2} = \text{۴ س پ} \times \text{پ ص}$$



شکل (۱۱۰)

جہاں س ماسکہ ہے۔ اس لئے محور کے متوازی وترانحنا ق کے لئے

$$\text{ق} = \text{نہا}\ \frac{\text{ق ص}^{2}}{\text{پ ص}} = \text{۴ س پ} \quad \ldots\ldots (4)$$

اگر پ پر کا عماد محور کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو $\text{جم طہ} = \frac{\text{س ے}}{\text{س پ}}$

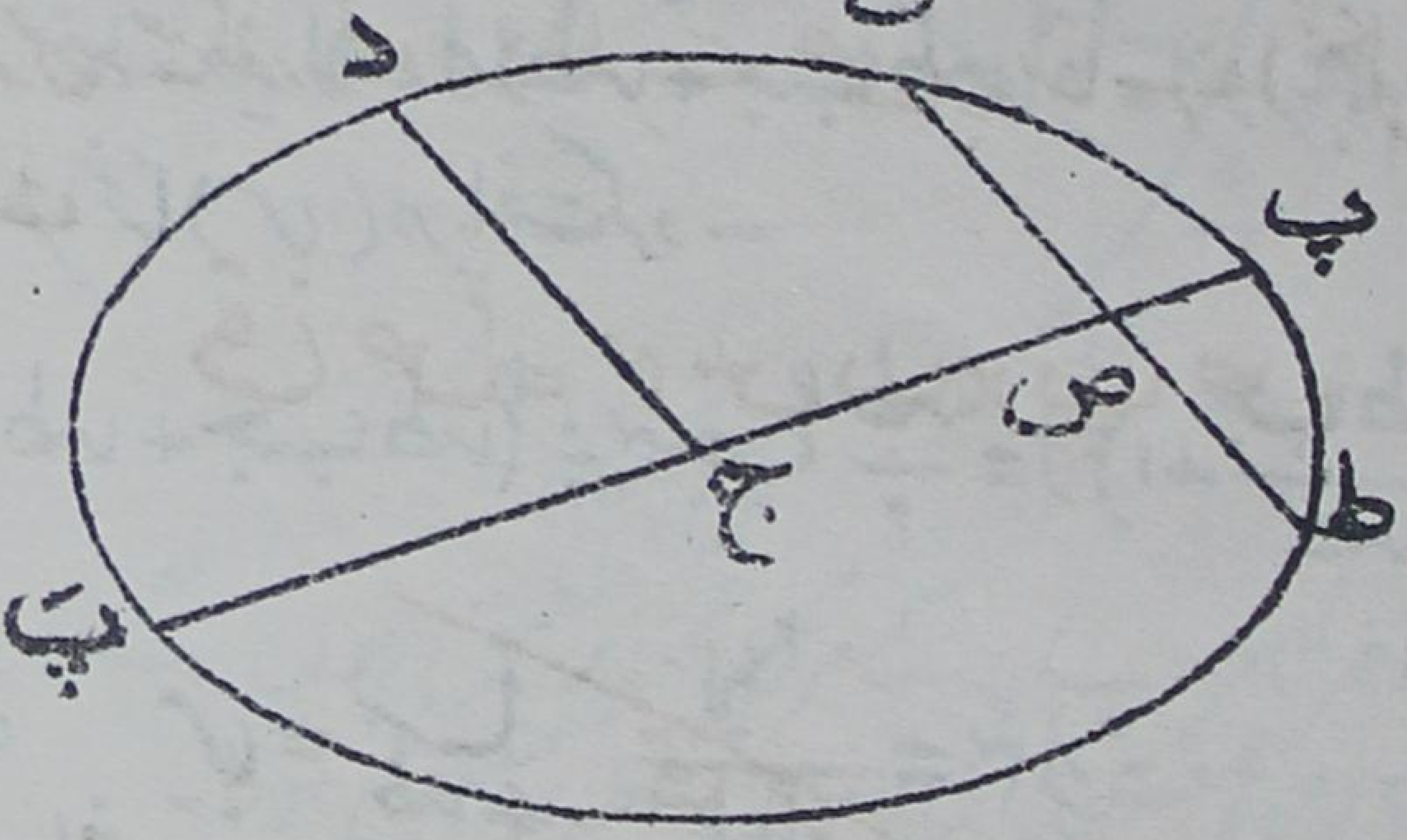
جہاں س ے ماسکہ سے پ پر کے مماس پر عمود ہے، اسلئے

$$\text{ر} = \tfrac{1}{2}\,\text{ق قط طہ} = 2\,\frac{\text{س پ}^{2}}{\text{س ے}} = 2\,\frac{\text{س پ}^{\frac{3}{2}}}{\text{س ا}^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots (5)$$

کیونکہ $س ے^{۲} = س ا \times س پ$ جہاں ا رأس ہے۔

مثال ۲- قطع ناقص (یا زاید) میں قطر پ ج پَ کے کسی ایک سرے پر کے مماس کے متوازی وتر ق ط کھینچا گیا ہے اور یہ اس قطر سے ص پر ملتا ہے تو

$$ق ص^{۲} : پ ص \times ص پَ = ج د^{۲} : ج پ^{۲}$$



شکل (۱۱۱)

جہاں ج د، ج پ کا مزدوج نیم قطر ہے۔ اسلئے مرکز میں سے گذرنیوالے وتر انحنا (ق) کیلئے

$$ق = نہا \frac{ق ص^{۲}}{پ ص} = نہا \frac{ج د^{۲}}{ج پ^{۲}} \times ص پَ$$

$$= \frac{۲ ج د^{۲}}{ج پ} \quad \ldots\ldots (۶)$$

اگر مرکز سے پ پر کے مماس پر عمود ج ے ہو اور ج پ عماد کے ساتھ زاویہ

ط بنائے تو $جم ط = \frac{ج ے}{ج پ}$ اور اس لئے

$$ر = \frac{۱}{۲} ق \, قط \, ط = \frac{ج د^{۲}}{ج ے} \quad \ldots\ldots (۷)$$

جو دفعہ ۴ ۱۳ (۱۷) کے مطابق ہے۔

اگر پ کے کسی ماسکی فاصلہ کا زاویہ پ پر کے عماد کے ساتھ ط ہو تو ہم ۳۴۲

جانتے ہیں کہ $\text{جم طہ} = \frac{\text{ج ب}}{\text{ج ا}}$ جہاں ا محور اعظم کا سرا ہے۔ اس لئے کسی ایک ماسکہ میں سے گذرنے والا وتر انحنا (قَ) حاصل ہوتا ہے

$$\text{قَ} = \text{۲ ر جم طہ} = \text{۲} \frac{\text{ج د}^{2}}{\text{ج ا}} \qquad \ldots\ldots (\text{۸})$$

مثال ۳۔ خط تدویر $\text{لا} = \text{ا} (\text{طہ} + \text{جب طہ})$، $\text{ما} = \text{ا} (\text{۱} - \text{جم طہ})$ .... (۹)

کے راس پر نیم قطر انحنا (ر) دریافت کرو۔

$$\frac{\text{لا}^{2}}{\text{۲ما}} = \text{ا} (\text{طہ} + \text{جب طہ})^{2} \div \text{۴ جب}^{2} \frac{\text{طہ}}{\text{۲}} = \text{ا} \left(\text{۱} + \frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}\right)^{2} \div \left(\frac{\text{جب} \frac{\text{طہ}}{\text{۲}}}{\frac{\text{طہ}}{\text{۲}}}\right)^{2}$$

اس سے $\text{ر} = \lim_{\text{طہ} \to \text{۰}} \frac{\text{لا}^{2}}{\text{۲ما}} = \text{۴ا}$ .... (۱۰)

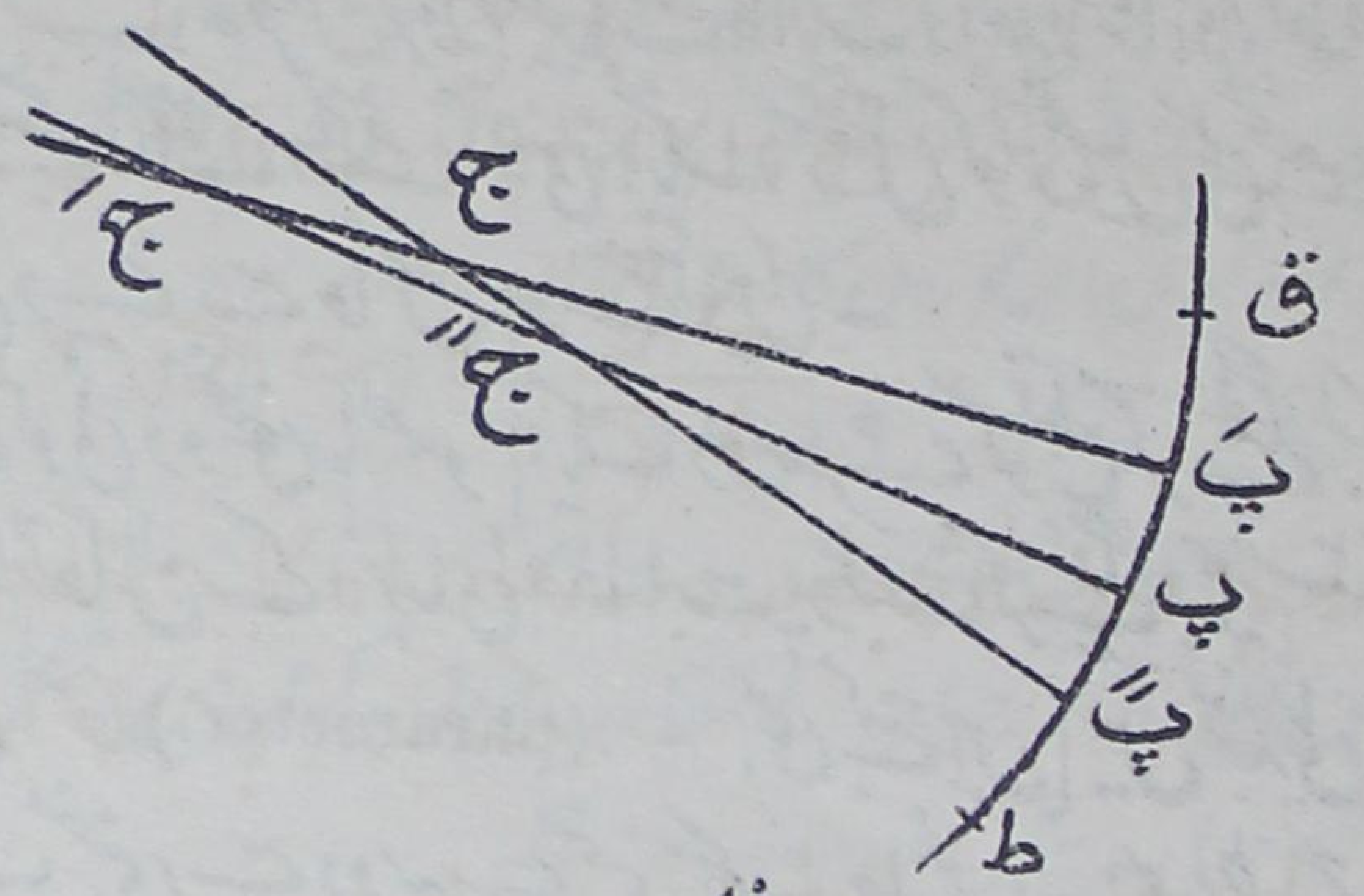
۱۳۷۔ لثمی دائرہ (Osculating circle)۔

انحنا پر بحث کرنے کا ذرا مختلف طریقہ "لثمی دائرہ" کے تخیل پر مبنی ہے۔ اگر منحنی پر پ کے قریب دو نقطے ق اور ط ہوں جہاں* ایک نقطہ پ کے ایک طرف واقع ہے اور دوسرا دوسری طرف تو دائرہ پ ق ط کے نیم قطر کی انتہائی قیمت پر ہم غور کرتے ہیں جبکہ ق اور ط دونوں پ سے لاانتہا قریب آجاتے ہیں۔

اگر منحنی زیر بحث کا انحنا پ پر مسلسل ہو تو ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ یہ دائرہ انتہا میں "دائرہ انحنا" پر منطبق ہوتا ہے کیونکہ اگر دائرہ پ ق ط کا مرکز ج ہو تو پ اور ق کے درمیان ایسا نقطہ پَ ضرور ہوگا کہ ج پَ معلومہ منحنی پر عماد ہو اور اسی طرح ایک نقطہ پً نقاط پ اور ط کے درمیان ایسا ہوگا کہ ج پً منحنی پر عماد ہو۔ فرض کرو کہ پَ ج اور پً ج

* یہ شرط ضروری نہیں لیکن اس سے ثبوت میں سہولت پیدا ہوتی ہے اور جملہ معمولی شرطیں اس سے پوری ہوتی ہیں۔

نقطہ پ کے عماد سے بالترتیب ج′ اور ج″ پر ملتے ہیں - شرط مذکورہ بالا کی رو سے



شکل (۱۱۲)

ج′ اور ج″ آخر الامر پ پر کے مرکز انحنا پر منطبق ہوں گے اور چونکہ ج′ < ج < ج″
۲۴۳ اس لئے ج بوجوہ مستحکمہ آخر الامر اس نقطہ پر منطبق ہوگا۔

چونکہ انتہا سے پہلے، دائرہ پ ق ط دئے ہوئے منحنی کو پ کی پڑوس میں تین دفعہ عبور کرتا ہے اس سے معلوم ہوتا ہے کہ تثمی دائرہ عام طور پر منحنی کو نقطہ تماس پر عبور کریگا، دیکھو شکل ۱۱۶ صفحہ (۴۷۹)۔

اگر شکل ۱۴ حصہ اول صفحہ (۲۱۰) میں ق نقاط پ، ق پ میں سے گذرنے والے دائرہ سے دوبارہ ع پر ملے تو ع ع = $\frac{\text{پ ع}^2}{\text{ق ع}}$

اس لئے منحنی ما = فہ (لا) کے اس وتر انحنا کے لئے جو محور ما کے متوازی ہے

$$\frac{1}{\text{ق}} = \text{نہا}\ \frac{\text{ق ع}}{\text{پ ع}^2} = \text{نہا}\ \frac{\text{ق ع}}{\text{ا ح}^2}\ \text{جم}^2\text{سا} = \frac{1}{2}\ \text{فہ}''(\text{ا})\ \text{جم}^2\text{سا}$$

جیسا دفعہ ۱۳۶ (۲) میں ثابت کیا گیا۔

مثال - اگر شکل ۱۱۰ میں دائرہ پ ق ط، پ ص سے ع پر ملے تو

ق ص × ص ط = پ ص × ص ع اور اس لئے ص ع = ۴ س پ

اس سے معلوم ہوا کہ انحنا کا وتر قطع مکافی کے محور کے متوازی ۴ س پ ہے۔

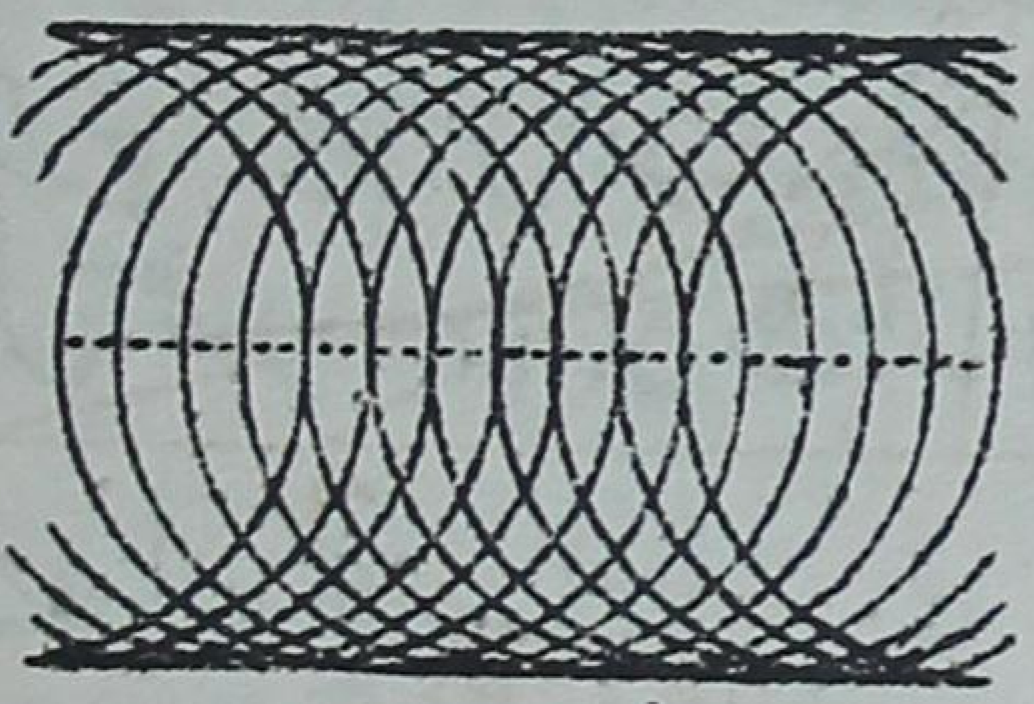
اسی طرح کا استدلال قطع ناقص کی صورت میں مرکز میں سے گذرنے والا وتر انحنا دریافت کرنے کے لئے

استعمال ہو سکتا ہے ۔

۱۳۸۔ لفاف ۔ فرض کرو کہ منحنیات کا ایک واحد لاتناہی نظام یا قبیل ہے اور اس قبیل کے الگ الگ منحنی ایک مستقل کو جو قبیل کی تخصیص کرتا ہے مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتے ہیں ۔

نظام کے کوئی دو منحنی بالعموم ایک دوسرے کو قطع کرینگے لیکن یہاں ہم بالخصوص نقاط تقاطع کے انتہائی مقامات پر بحث کرینگے جبکہ مستقل [یا جسے نظام کا متبدل (parameter.) بھی کہتے ہیں] میں تبدیلی لاانتہا کم ہو جب ہم ایک منحنی سے دوسرے منحنی تک جائیں ۔ اس طرح عام طور پر ایک یا زیادہ "انتہائی نقاط تقاطع" ہر ایک منحنی پر ہونگے جہاں پر یہ ساتھ کے منحنی کو کاٹتا ہے ۔ ان انتہائی نقاط تقاطع کا طریق نظام کا "لفاف" کہلاتا ہے

مثال ۱ ۔ معلوم نصف قطر کے دائروں کا ایک نظام ہے، ان کے مرکز ایک دئے ہوئے خط مستقیم پر واقع ہیں ۔ اس جگہ متبدل مرکز کا محدد ہے ۔



شکل (۱۱۳)

اگر نظام کے دو دائروں کے مرکز ج، جَ ہوں تو ان کے نقاط تقاطع کو ملانے والا خط ج جَ کی علی القوائم تنصیف کرتا ہے ۔ اس لئے کسی دائرہ کے انتہائی نقاط تقاطع ساتھ کے دائرہ کے ساتھ اُس قطر کے سرے ہیں جو مرکزوں کے ملانے والے خط پر علی القوائم ہے ۔
اس لئے لفاف دو خطوط مستقیم پر مشتمل ہے جو مرکزوں کے ملانے والے خط کے متوازی ہیں اور ۳۴۴
اس سے معلوم نیم قطر کے فاصلہ پر واقع ہیں ۔

مثال ۲ ۔ ایک خط مستقیم ہے جو محوروں کے ساتھ ملکے مستقل رقبہ (م^۲) کا مثلث بناتا ہے ۔ خط کے دو محل ا ب، اَ بَ ہوں جو پ پر قطع کرتے ہیں تو

مثلث اپ اَ ب پ پ بَ مساوی ہیں اس لئے

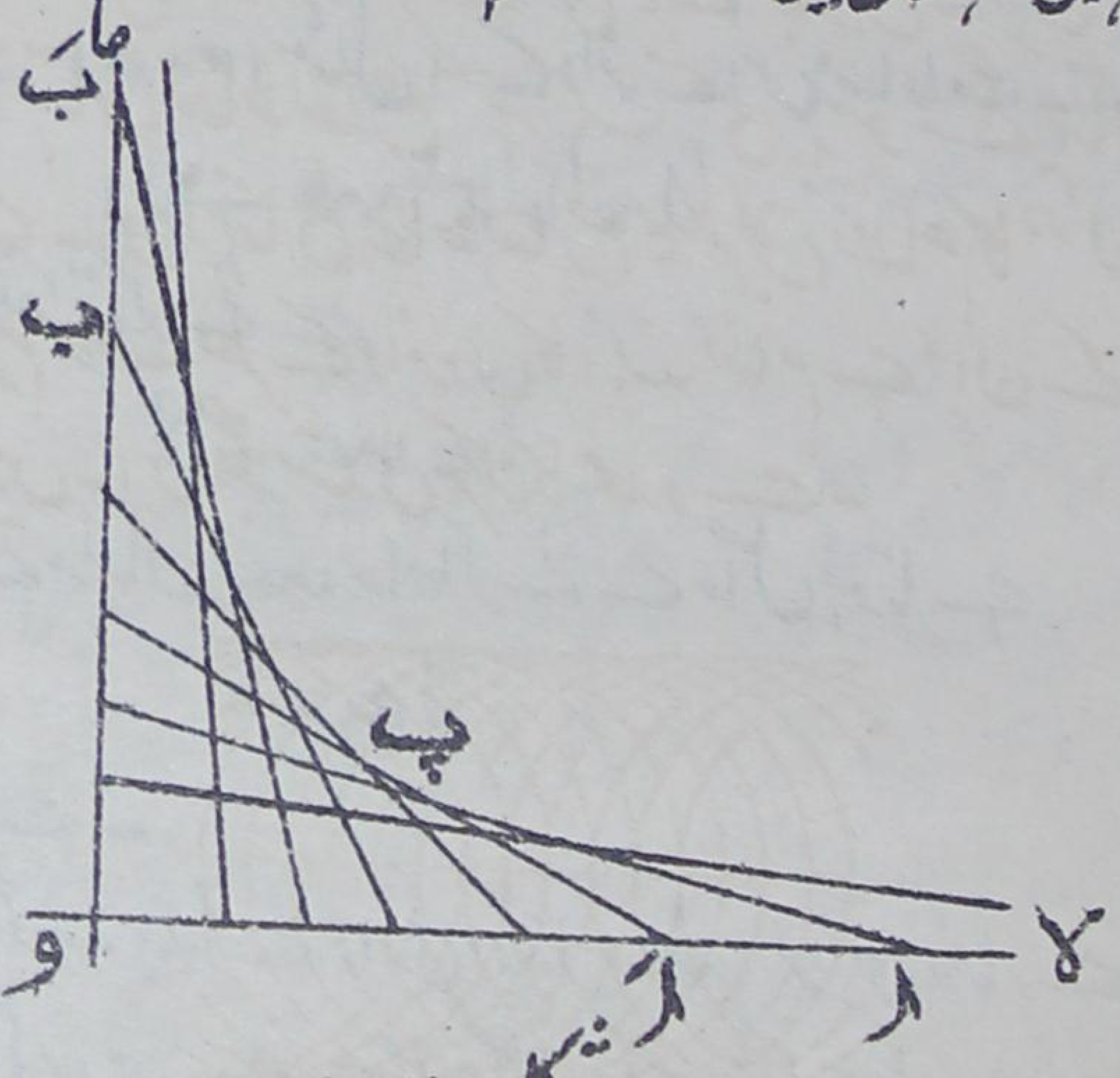
پ ا × پ اَ = پ ب × پ بَ

اس لئے آخرالامر جب ا اَ لا انتہا چھوٹا ہو تو پ، اب کا وسطی نقطہ ہوگا۔ اگر (لا، ما) نقطہ پ کے محدد ہوں اور محوروں کا درمیانی زاویہ سہ ہو تو

و ا = ۲ لا، و ب = ۲ ما، اس لئے

۲ لا ما جیب سہ = م^2

اسلئے لفاف قطع زائد ہے جس کے متقارب حوالہ کے محور ہیں۔ شکل ۱۱۴ سے اس صورت کی توضیح ہوتی ہے جس میں سہ = $\frac{\pi}{2}$



شکل (۱۱۴)

۱۳۹۔ لفاف دریافت کرنیکا عام طریقہ۔

فرض کرو کہ نظام کے کسی منحنی کی مساوات ہے

فہ (لا، ما، عہ) = ۰ .... (۱)

جہاں عہ متبدل ہے۔ جن نقطوں پر یہ نظام کے دوسرے منحنی

فہ (لا، ما، عہَ) = ۰ ...... (۲)

کو قطع کرتا ہے ان نقاط پر صریحاً

(فہ (لا، ما، عہَ) − فہ (لا، ما، عہ)) / (عہَ − عہ) = ۰ ...... (۳)

جب تغیر عہ ـ عہ لا انتہا کم ہو تو یہ آخری مساوات یہ شکل اختیار کرتی ہے

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف عہ}}\ \text{فہ}\,(\text{لا}،\ \text{ما}،\ \text{عہ}) = 0 \qquad \ldots\ldots (۴)$$

۳۴ جہاں $\frac{\text{جف}}{\text{جف عہ}}$ بلحاظ عہ کے جزوی تفرق کی علامت ہے دیکھو دفعہ ۳۴۵

انتہائی نقاطع کے نقطہ یا نقاط کے محدد (۱) اور (۴) کو بطور ہمزاد مساواتوں کے حل کرنے سے حاصل ہوتے ہیں اور انتہائی نقاط نقاطع کا طریق ان مساواتوں سے عہ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ دفعہ ۱۳۸ مثال ۱ کے دائرے اس مساوات سے تعبیر ہوتے ہیں

$$(\text{لا} - \text{عہ})^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2 \qquad \ldots\ldots (۵)$$

بلحاظ عہ کے تفرق کرنے سے

$$\text{لا} - \text{عہ} = 0 \qquad \ldots\ldots (۶)$$

(۵) اور (۶) کے درمیان عہ ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما} = \pm\,\text{ا} \qquad \ldots\ldots (۷)$$

جو مطلوبہ لفاف ہے۔

مثال ۲۔ اگر ذرہ مبدأ سے زاویہ ارتفاع طہ پر ایسی رفتار سے پھینکا جائے جو بلندی ب "کی وجہ" سے ہے، تو مکانی راستہ کی مساوات ہے

$$\text{ما} = \text{لا مس طہ} - \frac{1}{4}\,\frac{\text{لا}^2}{\text{ب}}\ \text{قط}^2\,\text{طہ} \qquad \ldots\ldots (۸)$$

جہاں لا، ما کے محور بالترتیب افقی اور انتصابی ہیں ۔ مس طہ کی بجائے عہ لکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما} = \text{عہ لا} - \frac{1}{4}\,\frac{\text{لا}^2}{\text{ب}}\,(1 + \text{عہ}^2) \qquad \ldots\ldots (۹)$$

مختلف ارتفاعوں یعنی عہ کی مختلف قیمتوں کے لئے راستوں کا لفاف معلوم کرنے کے لئے ہم بلحاظ عہ کے (۹) کو تفرق کرتے ہیں اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$لا - \frac{1}{۲} \frac{عہ لا^{۲}}{ب} = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

یہ مساوات پوری ہوتی ہے لا = ۰ یا عہ لا = ۲ ب سے۔ پہلی مساوات سے حاصل ہوتا ہے ما = ۰ اوراس سے معلوم ہوتا ہے کہ مبدأ طریق کا ایک حصہ ہے اور یہ ایسے بھی ظاہر ہے۔ دوسرے نتیجہ سے، عہ ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$لا^{۲} = ۴ ب (ب - ما) \quad \ldots\ldots\ldots (۱۱)$$

یہ ایک قطع مکافی ہے جس کا محور انتصابی ہے، اِس کا ماسکہ مبدأ پر ہے اور اِس کا راس بلندی ب پر ہے۔*

۱۴۰۔ جبریہ طریقہ۔ اگر مساوات

$$فہ (لا، ما، عہ) = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

میں فہ، عہ کا منطق صحیح تفاعل ہو تو گذشتہ دفعہ کے قاعدہ کی اور طرح سے بھی تحقیق ہو سکتی ہے۔ اگر لا، ما کو کوئی خاص قیمتیں دیجائیں تو مساوات سے عہ معلوم ہوتا ہے، یعنی اِس طرح معلوم ہوتا ہے کہ نظام کے کونسے منحنی دئے ہوئے نقطہ (لا، ما) میں سے گذرتے ہیں۔ اگر مساوات بلحاظ عہ کے ن ویں درجہ کی ہو تو اِن منحنیات (حقیقی یا خیالی) کی تعداد ن ہوگی اور بالعموم یہ ن منحنی مختلف ہونگے۔ لیکن اگر نقطہ زیر بحث دو متصل منحنیوں کا انتہائی نقطہ تقاطع ہو تو عہ کی دو قیمتیں منطبق ہونگی۔ ۳۴۶
دفعہ ۵۰ میں یہ ثابت کیا گیا تھا کہ عہ میں مساوات کی دوہری اصل کے لئے شرط یہ ہے

$$\frac{جف}{جف عہ} فہ (لا، ما، عہ) = ۰ \quad \ldots\ldots (۲)$$

---

* تاریخی نقطہ نظر سے یہ مسئلہ دلچسپ ہے کیونکہ یہ پہلی مثال ہے جس میں منحنی خطوط کے قبیل کا لفاف حاصل کیا گیا (برنولی نے)۔ لفاف دریافت کرنے کا عام طریقہ لیبنیز کی ایجاد معلوم ہوتا ہے۔

اس لئے حسب سابق انتہائی تقاطع (۱) اور (۲) کو ہمزاد مساواتوں کے طور پر حل کرنے سے حاصل ہوتے ہیں اور لفاف ان مساواتوں سے عہ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر مساوات (۱) عہ میں درجہ اول کی مساوات ہو تو نظام کا صرف ایک منحنی نقطہ معلومہ میں سے گذرتا ہے اور اس صورت میں لفاف نہیں ہو سکتا۔ اس کی مثالیں متوازی خطوط اور ہم مرکز دائرے ہیں۔ مثلاً

$$\text{ل لا} + \text{م ما} = \text{عہ} \qquad \text{(۳)}$$

$$\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} = \text{عہ} \qquad \text{(۴)}$$

اگر (۱) درجہ دوم کی مساوات ہو مثلاً

$$\text{پ عہ}^{2} + \text{۲ ق عہ} + \text{ر} = \text{۰} \qquad \text{(۵)}$$

جہاں پ، ق، ر متغیروں لا، ما کے معلومہ تفاعل ہیں تو مساوی اصلوں کے لئے شرط ہے

$$\text{پ ر} = \text{ق}^{2} \qquad \text{(۶)}$$

اس لئے یہ لفاف کی مساوات ہے۔

مثال ۱۔ خط مستقیم

$$\frac{\text{لا}}{\text{عہ}} + \frac{\text{ما}}{\text{بہ}} = \text{۱} \qquad \text{(۷)}$$

حوالہ کے محوروں کے ساتھ ملکر مستقل رقبہ (م²) کا مثلث قطع کرتا ہے۔ اسلئے

$$\text{عہ بہ جیب سہ} = \text{۲ م}^{2} \qquad \text{(۸)}$$

جہاں سہ محوروں کا میلان ہے۔ بہ کو ساقط کرنے سے متغیر خط کی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\text{عہ}^{2}\,\text{ما جیب سہ} - \text{۲ عہ م}^{2} + \text{۲ م}^{2}\,\text{لا} = \text{۰} \qquad \text{(۹)}$$

اس امر کو بیان کرنے سے کہ یہ مساوات بلحاظ عہ کے مساوی اصلیں رکھتی ہے ہمیں لفاف کی مساوات یہ حاصل ہوتی ہے

$$\text{۲ لا ما جیب سہ} = \text{م}^{2} \qquad \text{(۱۰)}$$

جیسا کہ دفعہ ۱۳۸ مثال ۲ میں حاصل کیا گیا۔

مثال ۲ - زاویہ قائمہ کی ایک ٹانگ ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتی ہے اور ۳۴۷
راس ایک ثابت خط مستقیم پر تسیم کرتا ہے، دوسری ٹانگ کا لفاف مطلوب ہے۔
اگر ثابت خط مستقیم محور ما ہو اور ثابت نقطہ (ا، ۰) تو دوسری ٹانگ کی مساوات
باسانی حاصل ہوتی ہے

$$ما = م لا + \frac{۱}{م} \quad .... (۱۱)$$

جہاں م محور لا کے ساتھ زاویہ میلان کا مماس ہے۔ اس مساوات کو اس شکل میں
لکھنے سے

$$م^۲ لا - م ما + ۱ = ۰ \quad .... (۱۲)$$

ہم دیکھتے ہیں کہ لفاف قطع مکافی ہے

$$ما^۲ = ۴ ا لا \quad .... (۱۳)$$

۱۴۱ - لفافوں کی تماسی خاصیت - اوپر کی مثالوں سے
طالب علم ذیل کے مسئلہ کے ادراک کے لئے تیار ہو چکا ہوگا۔
منحنیات کے کسی نظام کا لفاف (بالعموم) اپنے ہر نقطہ پر نظام کے متناظر
منحنی کو مس کرتا ہے۔

مساواتوں $فا (لا، ما، عا) = ۰ \quad .... (۱)$

اور $\frac{جف}{جف عا} فا (لا، ما، عا) = ۰ \quad .... (۲)$

سے لا، ما بطور عا کے تفاعل کے حاصل ہوتے ہیں، فرض کرو کہ

$$لا = فا_۱ (عا)، ما = فا_۲ (عا) \quad .... (۳)$$

اور مساواتوں (۳) سے لفاف کی تعیین ہوتی ہے۔ اگر (۳) سے لا، ما کی
قیمتیں مساوات (۱) کے دائیں رکن میں درج کی جائیں تو عا کا ایک تفاعل
حاصل ہوگا جو متماثلاً صفر ہوگا اور اس تفاعل کو بلحاظ عا کے تفرق کرنے سے
جو نتیجہ حاصل ہوگا وہ بھی صفر ہوگا، اس لئے دفعہ ۵۹ (آ) کے قاعدہ کی
رو سے لازماً

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}\cdot\frac{\text{فر لا}}{\text{فرعہ}}+\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}\cdot\frac{\text{فر ما}}{\text{فرعہ}}+\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف عہ}}\times\frac{\text{فرعہ}}{\text{فرعہ}}=0 \quad (۴)$$

اور (۲) کی رو سے یہ ربط ہو جاتا ہے

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}\cdot\frac{\text{فر لا}}{\text{فرعہ}}+\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}\cdot\frac{\text{فر ما}}{\text{فرعہ}}=0 \quad \ldots\ldots (۵)$$

$$\text{یا}\quad \frac{\frac{\text{فر ما}}{\text{فرعہ}}}{\frac{\text{فر لا}}{\text{فرعہ}}}=-\frac{\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}}{\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}} \quad \ldots\ldots (۶)$$

دفعہ ۶۱ کی رو سے اس مساوات کا دایاں رکن لفاف کے لئے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی

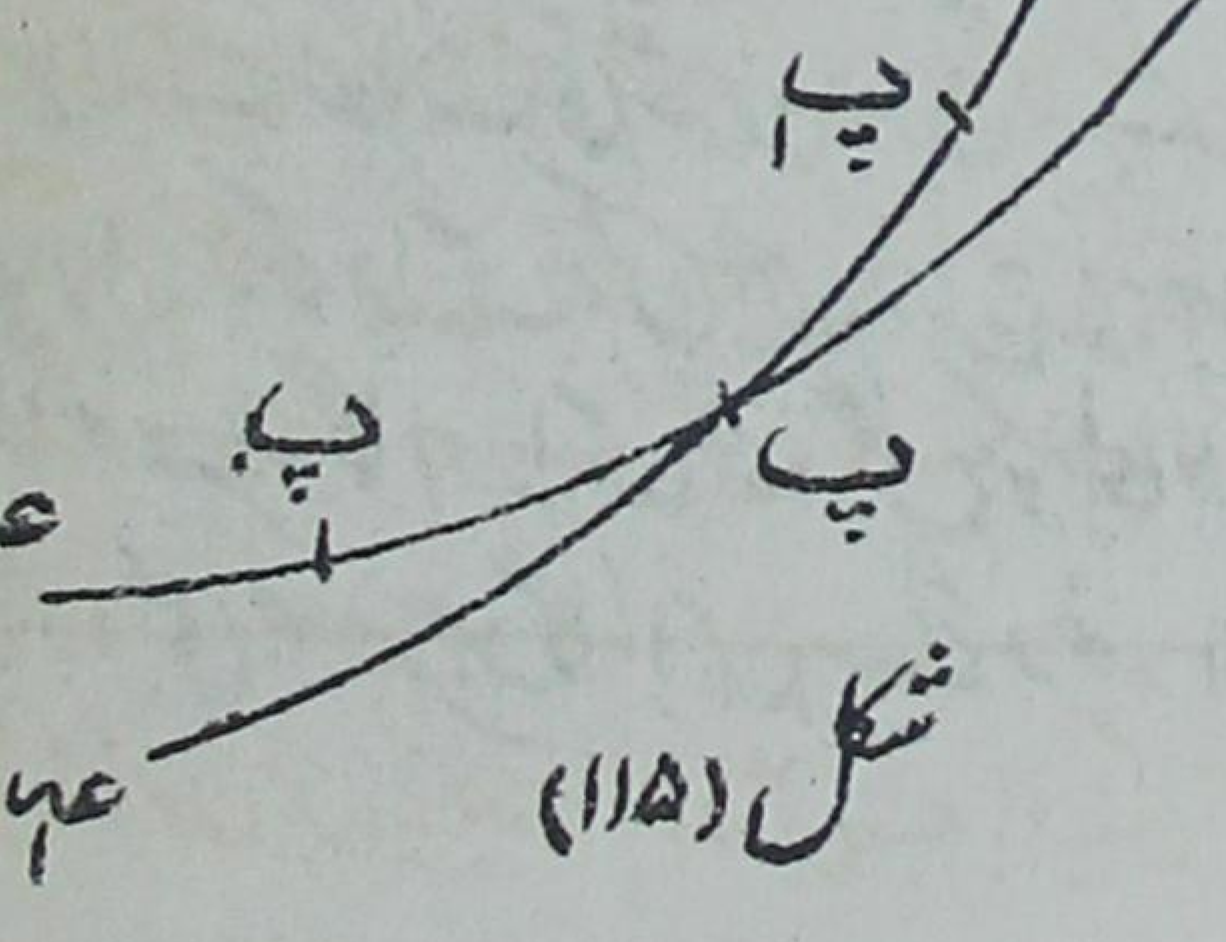
قیمت ہے اور دفعہ ۵۹ (۱۰) کی رو سے بایاں رکن منحنی (۱) کے لئے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی

قیمت کو تعبیر کرتا ہے، اِس سے معلوم ہوا کہ انتہائی نقطہ تقاطع پر منحنی (۱) ۳۴۸

اور لفاف کا مماس وہی ہے۔

اس مسئلہ کا ہندسی پہلو یوں واضح ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ شکل میں متبدل عہ کی قیمتوں عہ، عہ کے جواب میں نظام کے دو منحنیات کے کچھ حصے دکھائے گئے ہیں اور یہ منحنی ایک دوسرے کو پ پر قطع کرتے ہیں۔



شکل (۱۱۵)

فرض کرو کہ پ ب، پ ا لفاف پر کے متناظر نقطے ہیں یعنی پ ب، پ ا کا انتہائی مقام ہے جبکہ عب کو قائم رکھ کے عا کو عب کے لاانتہا قریب لیا جاتا ہے اور پ ا، پ کا انتہائی مقام ہے جبکہ عا کو ثابت رکھکر عب کو عا کے لاانتہا قریب لیا جاتا ہے۔ چونکہ عا کے بہ تغیر متقابل رخوں میں ہیں اور چونکہ پ کے محدد عام طور پر عب، عا کے متشاکل تفاعل ہوتے ہیں، اس لئے پ کے متناظر ہٹاؤ پ پ ب اور پ پ ا عام طور پر تقریباً متقابل سمتوں میں ہونگے (جبکہ | عا - عب | بہت چھوٹا ہو) اور پ ب پ پ ا بڑے منفرجہ زاویہ والا مثلث ہوگا۔ اس لئے آخر الامر جب | عا - عب | لاانتہا چھوٹا ہو تو پ ب پ اور پ پ ا سمت میں منطبق ہوں گے یعنی لفاف کا مماس منحنی کے مماس پر منطبق ہوگا۔

بعض صورتوں میں اوپر کی تحقیق درست نہیں رہتی۔ جہاں تک تحلیلی ثبوت کا تعلق ہے یہ ظاہر ہے کہ (۵) سے کوئی نتیجہ مستنبط نہیں ہو سکتا جبکہ نقطہ زیر بحث پر ایک ساتھ

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف عا}} = \cdot \quad \ldots\ldots (۷)$$

یعنی جبکہ منحنی (۱) کے لئے $\frac{\text{فر عا}}{\text{فر لا}}$ کی قیمت یگانہ طور پر معین نہ ہو سکے۔ یہ خصوصیت ایک "نادر نقطہ" پر پیدا ہوتی ہے خواہ اپنی نوعیت کے لحاظ سے یہ عقدہ ہو یا قرن یا اکیلا نقطہ (دیکھو دفعہ ۱۱۹)۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ قبیل کے نادر نقطوں کا طریق، اگر ایسے طریق کا وجود ہو، (۱) اور (۲) کے درمیان عا کے حاصل اسقاط میں شریک ہوگا لیکن یہ طریق عام طور پر دیئے ہوئے منحنیوں کو صحیح معنوں میں "مس" نہیں کرتا۔ اس امر کی پوری تحقیق اس کتاب کے حدود٭ سے باہر ہے لیکن ایک سادہ سی مثال یہاں دیجاتی ہے

٭ تفرقی مساوات کی کتابوں میں یہ بحث "نادر حل" کے باب کی ضمن میں ملے گی۔

ذیل کے قبیل پر غور کرو۔

ا (ما - عما)۲ = لا۲ (لا + ب) .... (۸)

دفعہ ۱۱۹ سے ظاہر ہے کہ نقطہ (۰، عما) پر عقدہ ہے، قرن ہے یا اکیلا نقطہ ہے بموجب اسکے کہ ب مثبت ہے، صفر ہے یا منفی۔ لفاف معلوم کرنیکے عمل سے حاصل ہوتا ہے ما - عما = ۰، اس لئے ۳۴۶

لا۲ (لا + ب) = ۰ .... (۹)

خط لا = ۰ سے نادر نقطوں کا طریق حاصل ہوتا ہے جو اصلی منحنیوں کو مس نہیں کرتا۔ بخلاف اس کے خط لا = - ب مس کرتا ہے (اگر ب صفر نہ ہو) ہندسی بحث میں یہ مان لیا گیا تھا کہ پ کے عین پڑوس میں منحنیات عما، عما کا کوئی اور تقاطع نہیں ہے۔ عقدہ کی صورت میں عام طور پر دو متصل تقاطع ہونگے جن کے لا، محدد (مثلاً) بالترتیب اِن شکلوں کے ہونگے ف (عما، عما) اور ف (عما، عما)، لیکن ف (عما، عما) متبدلوں عما، عما کا متشاکل تفاعل نہیں ہے اس لئے یہ استدلال عقدوں کے طریق پر عائد نہیں ہوتا۔ نیز قرن کی صورت میں، عما یا عما کے لاانتہا چھوٹے تغیر کی وجہ سے نقطہ پ کا ہٹاؤ شکل ۱۱۵ میں رتبہ اول کا نہیں ہوگا اور عام طور پر نقطے پ، اور پ، دونوں پ کے ایک ہی جانب ہوتے ہیں۔ اکیلے نقطہ کی پڑوس میں متصل منحنیات کا کوئی حقیقی تقاطع نہیں ہوتا۔

۱۴۲۔ برپیچہ۔ منحنی کا برپیچہ (Evolute) اس کے مرکز انحنا کا طریق ہوتا ہے اور چونکہ مرکز انحنا (دفعہ ۱۳۴) دو متصل عمادوں کا نقطہ تقاطع ہے اس لئے برپیچہ دئے ہوئے منحنی کے عمادوں کا لفاف ہے۔ اسلئے ابتدائی منحنی کے عماد برپیچہ* کے مماس ہوتے ہیں۔

* یہ ظاہر ہے کہ دفعہ ۱۴۱ کے آخر کی مستثنےٰ صورتیں خط مستقیم کے لفاف میں پیدا نہیں ہوتیں۔

مثال ۱۔ قطع مکافی ع^{۲} = ۴ ا لا . . . . (۱)

میں لا = ا مم^{۲} سا ، ع = ۲ ا مم سا . . . . (۲)

اور (دفعہ ۲۳۴ مثال ۴) سے

ر = $-\dfrac{\text{۲ ا}}{\text{جب}^{۳}\ \text{سا}}$ . . . . (۳)

اس لئے انحنا کے مرکز کے محدد یہ ہیں

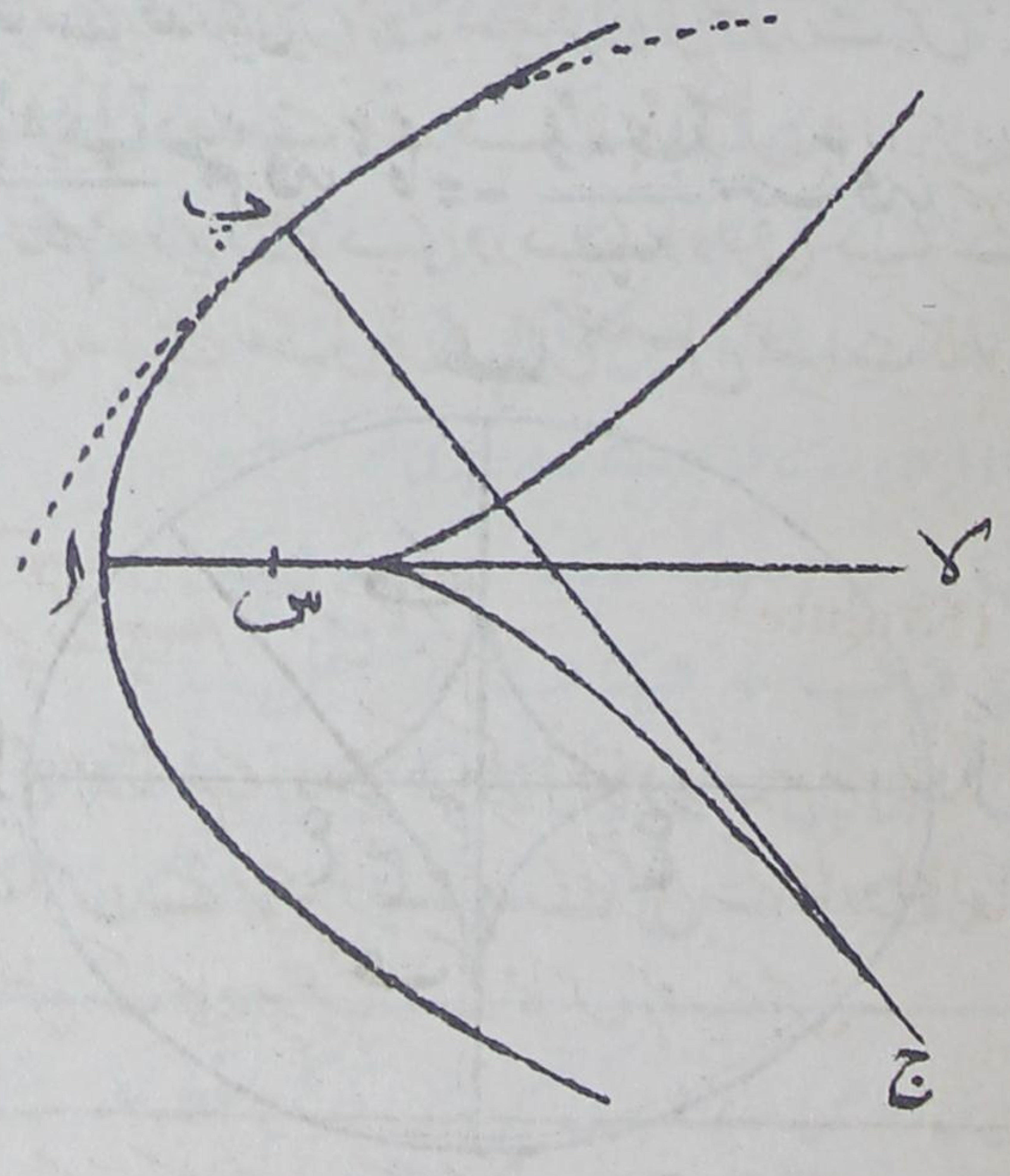
ضا = لا - ر جب سا = ۳ لا + ۲ ا

غا = ع + ر جم سا = $-\dfrac{\text{ع}^{۳}}{\text{۴ ا}^{۲}}$ . . . . (۴)

اسلئے غا^{۲} = $\dfrac{\text{ع}^{۶}}{\text{۱۶ ا}^{۴}}$ = $\dfrac{\text{۴ لا}^{۳}}{\text{ا}}$ = $\dfrac{۴}{۲۷}$ (ضا - ۲ ا)^{۳} / ا

پس برپیچہ نیم کعبی مکافی ہے ا غا^{۲} = $\dfrac{۴}{۲۷}$ (لا - ۲ ا)^{۳} . . . . (۵)

۲۵۰



شکل (۱۱۶)

بطرز دیگر - مخروطات کی کتابوں میں یہ ثابت کیا جاتا ہے کہ عماد کی مساوات کی یہ شکل ہے

$ما = م (لا - ۲ا) - ا م^{۳}$ ....(۶)

اس کا لفاف معلوم کرنیکے لئے بلحاظ م کے جزوی تفرق لو اور حاصل کرو

$لا - ۲ا = ۳ا م^{۲}$ ، $ما = ۲ا م^{۳}$ ....(۷)

م کے ساقط کرنے سے نتیجہ (۵) حاصل ہوتا ہے - منحنی شکل ۱۱۶ میں دکھایا گیا ہے -

مثال ۲- ناقص $لا = ا جم فا$ ، $ما = ب جب فا$ ....(۸)

کے کسی نقطہ پر عماد ہے

$$\frac{ا لا}{جم فا} - \frac{ب ما}{جب فا} = ا^{۲} - ب^{۲} \quad ....(۹)$$

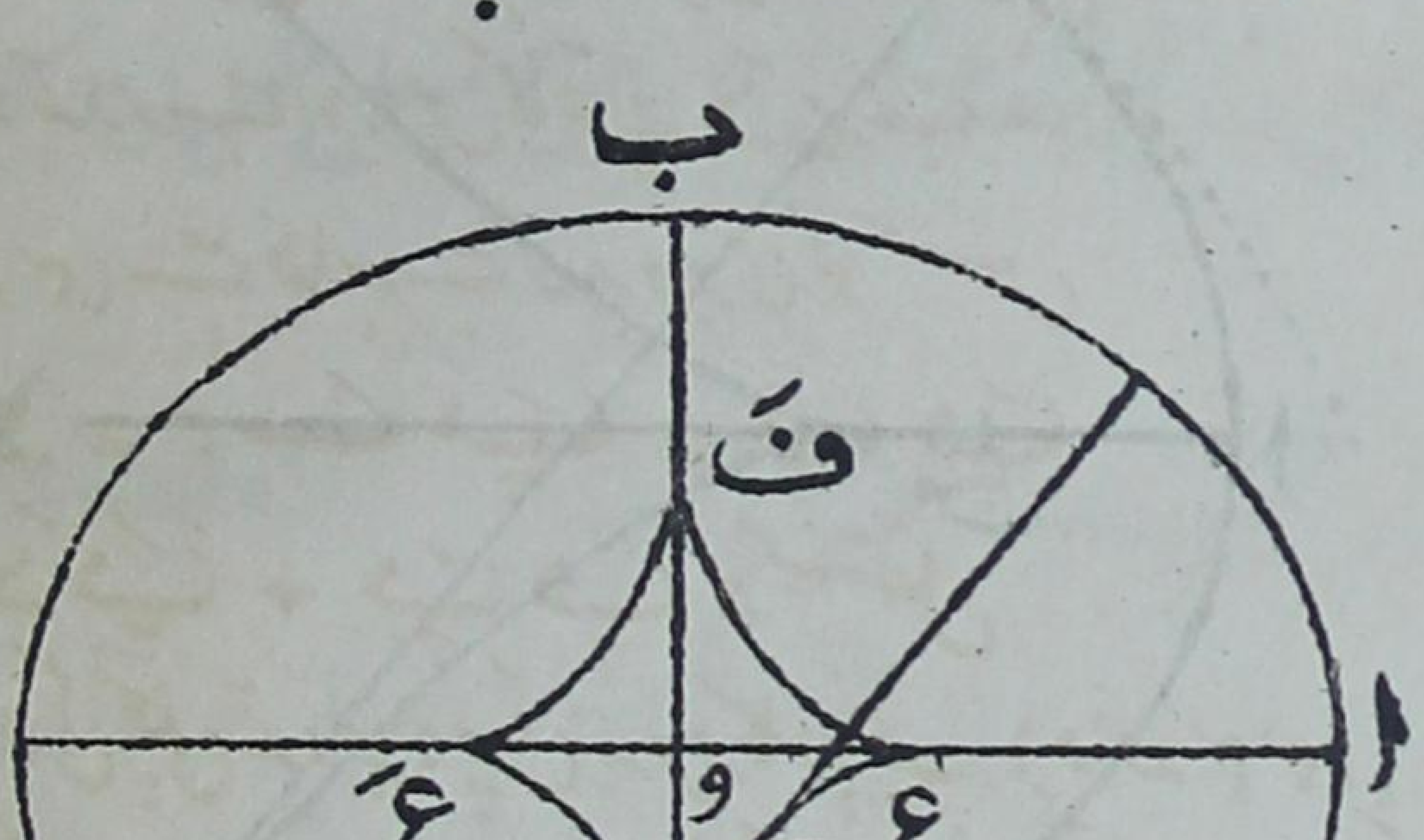
بلحاظ فا کے تفرق کرنے سے

$$\frac{ا لا}{جم^{۳} فا} = -\frac{ب ما}{جب^{۳} فا} = لہ \text{ (فرض کرو)} \quad ....(۱۰)$$

(۹) میں درج کرنے سے $لہ = ا^{۲} - ب^{۲}$ ....(۱۱)

اس لئے مرکز انحنا کے محدد ہیں

$$لا = \frac{ا^{۲} - ب^{۲}}{ا} جم^{۳} فا ، \quad ما = -\frac{ا^{۲} - ب^{۲}}{ب} جب^{۳} فا \quad ....(۱۲)$$



شکل (۱۱۷)

اور برپیچہ ہے $(\text{ا لا})^{\frac{2}{3}} + (\text{ب ما})^{\frac{2}{3}} = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)^{\frac{2}{3}}$ .... (۱۳) ۳۵۱

یہ منحنی جو ستارہ نما سے قائم ظل کے ذریعہ حاصل ہوسکتا ہے شکل ۱۱۷ میں دکھایا گیا ہے۔ نقاط اَ ب، اً ب پر انحنا کے مرکز بالترتیب ہیں

ع، ف، عً، ف

مثال ۳ ۔ خط تدویر کا برپیچہ دریافت کرو۔

خط تدویر ا پ د (شکل ۱۱۸) کے کسی نقطہ پ پر دفعہ ۱۴۴ مثال ۲ کی رو سے

ر = ۲ پ ے .... (۱۴)

محور اب کو دَ تک اتنا بڑھاؤ کہ ب دَ = اب اور ت ے کو بڑھاؤ کہ یہ دَ میں سے گذرنے والے، ب ے کے متوازی خط سے ےَ پر ملے۔ ے ےَ کے قطر پر دائرہ کھینچو اور پ ے کو اتنا بڑھاؤ کہ دائرہ کے محیط سے یہ پَ پر ملے تو پَ ے = پ ے، پس پَ خط تدویر کے نقطہ پ پر مرکز انحنا ہے۔ چونکہ قوس پَ ےَ قوس ت پ کے مساوی ہے اور اس لئے ب ے اور دَ ےَ کے مساوی ہے، اسلئے پَ کا طریق صریحاً ایک خط تدویر ہے جس کا مکون دائرہ ے پَ ےَ ہے جو دَ ےَ کے نچلے پہلو پر لڑھکتا ہے اور مرسم نقطہ دَ سے لڑھکنا شروع ہوتا ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ خط تدویر کا برپیچہ ایک مساوی خط تدویر ہے اور اس کا قرن دَ پر ہے۔

نیز دفعہ ۱۲۲ (۴) سے ظاہر ہے کہ تدویری قوس

پَ د = ۲ ے پَ = پ پَ

اس لئے قوس دَ پَ + پ پَ = مستقل .... (۱۵)

اس لئے شکل ۱۱۸ کی نچلی تدویر اوپر کی تدویر کا درپیچہ (دفعہ ۱۴۴) ہے*

۳۵۲ جب کبھی ایک منحنی کی مساوات ع اور ۿ کے رشتہ سے متعین ہوسکے مثلاً

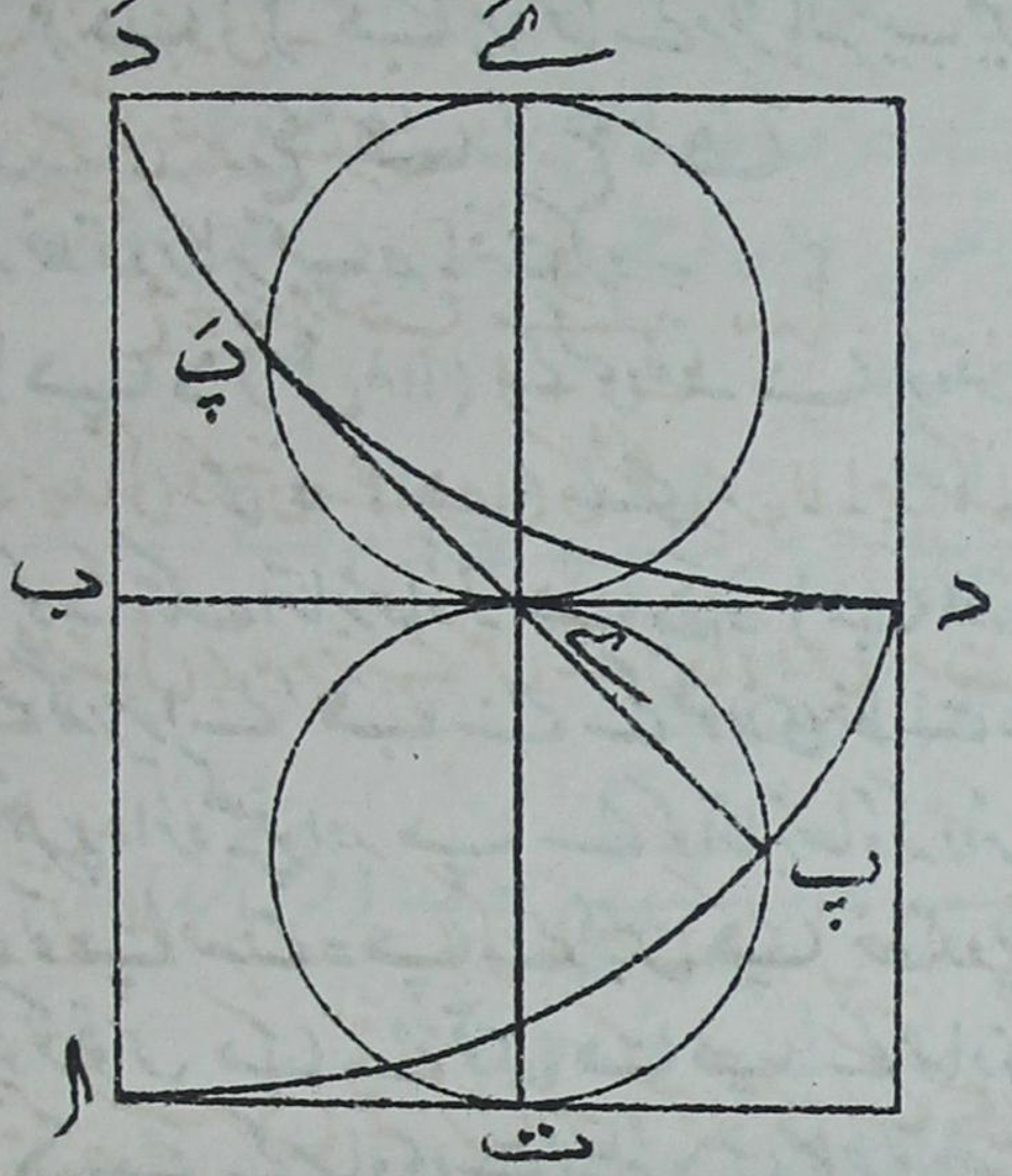
---

* یہ مثال تدویری رقاص کے نظریہ کی ضمن میں تاریخی نقطہ نظر سے مشہور ہے۔ یہ نتائج ہائی گن (Huyghens ۱۶۷۳) کے ساتھ منسوب ہیں۔

ع = ف (سا) .... (۱۶)

تو بر یچیہ اس مساوات

ع = فَ (سا) .... (۱۷)



شکل (۱۱۸)

سے حاصل ہوگا بشرطیکہ (۱۷) میں یہ فرض کر لیا جائے کہ سا کا مبدأ ایک قائمہ میں سے آگے کو ہٹا دیا گیا ہے۔ شکل ۱۰۸ صفحہ (۴۶۲) کے حوالہ سے یہ بالکل واضح ہوگا کیونکہ بر یچیہ کے مماس پر مبدأ سے عمود و ع = پ ے = $\frac{\text{فرع}}{\text{فرسا}}$ جبکہ اصلی منحنی کے رموز استعمال کئے جائیں۔

مثال ۴۔ بر یا دہ تدویر کا بر یچیہ دریافت کرو۔

شکل ۱۰۱ صفحہ (۴۰۷) میں اگر و ے ت پ پر جو بر تدویر کا نقطہ پ پر مماس ہے عمود ع نکالا جائے تو

$$ع = و ت جم پ ے ج = (۲ ا + ب) جم \frac{فہ}{۲}$$

یا ع = (ا + ۲ ب) جم $\frac{ا}{ا + ۲ ب}$ سا ۔۔۔۔۔۔ (۱۸)

اگر سا کا مبدأ رأس کی بجائے قرن کے جواب میں ہو تو زاویہ کی جیب التمام کی بجائے جیب رکھنا ہو گی۔

اِس لئے بر پیچہ کی صورت میں

ع = ۔ ا جب $\frac{ا}{ا + ۲ ب}$ سا ۔۔۔۔۔۔۔ (۱۹)

۳۵۳ جیسے سا کے مبدأ کی درستی سے (۱۸) کی شکل میں لایا جا سکتا ہے۔ اِس لئے معلوم ہوا کہ بر پیچہ متشاکل بر تدویر ہے جس کے ابعاد اِس نسبت $\frac{ا}{ا + ۲ ب}$ سے کم کر دئے گئے ہیں۔

در تدویر کے لئے صرف ب کی علامت کو بدل دینا ہے۔*

۱۴۳۔ **بر پیچہ کی قوس۔** کسی منحنی کے کسی دو نقطوں پر انحنا کے نیم قطروں کا فرق بر پیچہ کے متناظر نقطوں کے درمیان کی قوس کے مساوی ہے۔

اس کے ثابت کرنیکے لئے فرض کرو کہ منحنی کے دو متصل نقطوں پ اور پ، کے عماد ایک دوسرے سے ج پر ملتے ہیں، اور ج اور ج، متناظر

---

* معائنہ کے بعد معلوم ہوتا ہے کہ مساوات ع = ج جم م سا یا ع = ج جب م سا بالترتیب "مدبر" یا در تدویر کو تعبیر کرتی ہے بموجب اسکے کہ م ≶ ا بشرطیکہ دفعہ ۱۲۳ کی تعریف کے مطابق گرو تدویروں کو بر تدویروں میں شامل کر لیا جائے۔

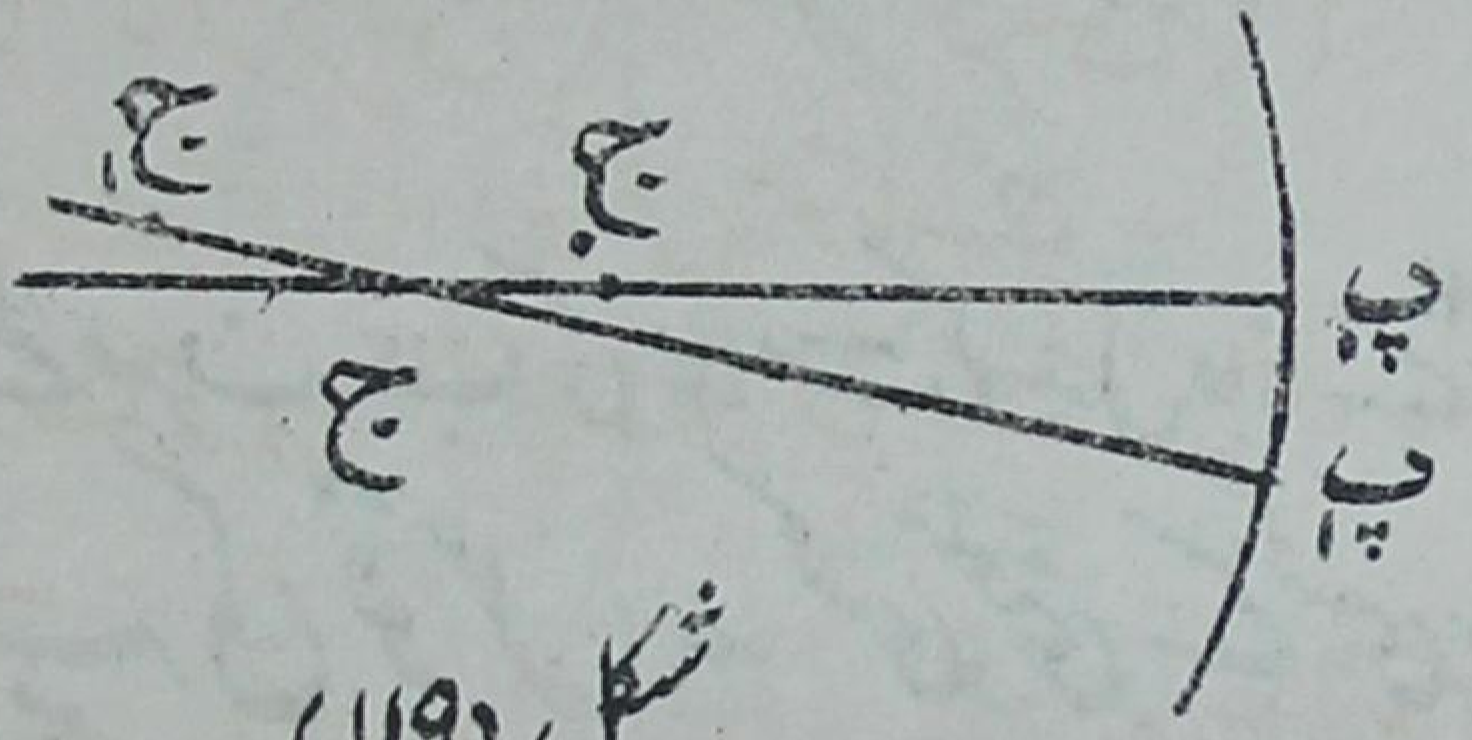
بلحاظ مرکز کے "مدبر" یا در تدویر کا پائیں منحنی خاص طرز کا بر دوریہ ہے جس کی طرف دفعہ ۱۲۵ مثال ۲ میں اشارہ کیا گیا ہے شکل ۹۲ چہار

انحنا کے مرکز ہیں۔

دفعہ ۱۴۱ کی رو سے ج ج ج بالعموم منفرجہ زاویہ والا مثلث ہے اور جب پ، کو پ کے لاانتہا قریب لیا جائے تو ج، ج + ج ج، آخرالامر ج، ج کے ساتھ نسبت تساوی رکھتا ہے۔

نیز چونکہ ج سے منحنی پر کے متحرک نقطہ کا فاصلہ نقطہ پ پر اقل قیمت رکھتا ہے اس لئے ج پ، اور ج پ کے درمیان فرق آخرالامر دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے اور اس لئے نظر انداز ہو سکتی ہے۔ اس لئے

ج، پ، - ج. پ. = ج، ج + ج ج. = ج، ج.



شکل (۱۱۹)

اس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر ابتدائی منحنی کا نیم قطر انحنا ر ہو اور برپیچہ کی قوس صہ تو آخرالامر مف ر = مف صہ یا

فر ر / فر صہ = ۱ .... (۱)

پس تکمل سے ر = صہ + م .... (۲)

جہاں م اختیاری مستقل ہے جو صہ کی پیمائش کے مبدا پر منحصر ہے۔

بطرز دیگر دفعہ ۱۳۲ کی مساوات تو

ضا = لا - ر جب سا ، عا = عا + ر جم سا ...... (۳)

قرنوں والے بردوریہ کے پائیں منحنی کو تعبیر کرتی اور شکل ۹۴ چار قرنوں والے در تدویر پائیر کو۔

کے تفرق سے

فر ضا / فر س = - فر ر / فر س جب سا، فر عا / فر س = فر ر / فر س جم سا ...(۴) ۳۵۴

کیونکہ فر لا / فر س = جم سا، فر ما / فر س = جب سا، فر سا / فر س = ۱ / ر

اِس لئے فر عا / فر ضا = - مم سا ....(۵)

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ برپیچہ کا مماس ابتدائی منحنی کا عماد ہے اور

فر صہ / فر س = √{ (فر ضا / فر س)^۲ + (فر عا / فر س)^۲ } = فر ر / فر س ...(۶)

تکمیل کرنے پر اِس سے نتیجہ (۲) حاصل ہوتا ہے۔

خط تدویر کی صورت میں یہ خاصیت اِس سے قبل دفعہ ۱۴۲ (۱۵) میں حاصل کی گئی ہے۔

اوپر کے مسئلہ سے یہ ایک عجیب نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ منحنی کے متصل نقطوں کے انحنا کے دائرے عام طور پر ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے۔ اسکی وجہ یہ ہے۔ مرکزوں کے درمیان کا فاصلہ برپیچہ کا وتر ہے اور اسلئے عام طور پر متناظر قوس سے کم ہوتا ہے یعنی نیم قطروں کے فرق سے کم رہتا ہے۔

نیز اگر منحنی کی ذاتی مساوات یہ ہو

س = ف (سا) ....(۷)

تو صہ = ر + م = فَ (سا) + م ....(۸)

اگر سا کا مبدا بقدر ایک قائمہ کے بدل دیا جائے تو یہ برپیچہ کی ذاتی مساوات ہوگی۔ جمع کیا ہوا مستقل حذف کر دیا جاسکتا ہے اگر صہ کے مبدا کا مناسب انتخاب کیا جائے۔

مثال ۱۔ قطع ناقص کے محور ۱، ب ہیں۔ اِن محوروں کے سروں پر نیم قطر انحنا بالترتیب ب^۲ / ۱ اور ۱^۲ / ب ہیں، اِس لئے جن چار حصوں میں برپیچہ کے قرن

اسے تقسیم کرتے ہیں (شکل ۱۱۷) ان میں سے کسی ایک کا طول ہے

$$\frac{ا^{2}}{ب} - \frac{ب^{2}}{ا} = \frac{ا^{3} - ب^{3}}{اب}$$

مثال ۲ ۔ خط تدویر کی ذاتی مساوات ہے

$$س = ک \; جب \; سا \quad ......(۹)$$

اور پرپیچہ کی مساوات ہے

$$ص = ک \; جم \; سا \quad ......(۱۰)$$

اس لئے پرپیچہ مساوی خط تدویر ہے جیسا کہ پہلے ثابت کیا گیا۔

۱۴۴ ۔ درپیچے اور متوازی منحنی ۔ اگر منحنی ا' ایک منحنی ب کا پرپیچہ ہو تو ب' ا کا ایک درپیچہ (Involute) ہوگا۔

ایک درپیچہ اس لئے کہ کسی ایک منحنی کے بیشمار درپیچے ہوتے ہیں۔ کسی منحنی کا درپیچہ اس طرح معلوم ہو سکتا ہے کہ منحنی پر ثابت نقطہ و لو اور اس کے کسی متغیر نقطہ پ پر کے مماس کی سمت میں و سے پرے طول پ ق اتنا ناپو کہ

$$قوس \; وپ + پ ق = مستقل \quad ......(۱)$$

۲۵۵ دفعہ ۱۴۳ کے استدلال کو الٹنے سے یہ بآسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ دیئے ہوئے منحنی کے مماس ق کے طریق کے عماد ہیں، اس سے معلوم ہوا کہ یہ طریق درپیچہ کی تعریف بالا کو پورا کرتا ہے۔ "مستقل" کو بدلنے سے ایک ہی منحنی کے کئی درپیچے حاصل ہوتے ہیں۔

عملی مثال کے طور پر ایسا خیال کرو کہ معلومہ شکل کی کسی مادی قوس پر ایک تاگا لپیٹ دیا گیا ہے اور اسی کا ایک سرا منحنی کے ایک ثابت نقطہ سے بندھا ہوا ہے۔ رسی کے آزاد حصہ پر کا کوئی نقطہ جو منحنی مرتسم کرتا ہے وہ درپیچہ منحنی ہے۔ دراصل اس نام کی یہی وجہ تسمیہ ہے۔

مثال ۱ ۔ خط خسری زنجیرہ کا درپیچہ ہے۔ دفعہ ۱۲۰۔

مثال ۲ - نیم قطر ا کا دائرہ ہے، اس کے دریچہ میں صریحاً

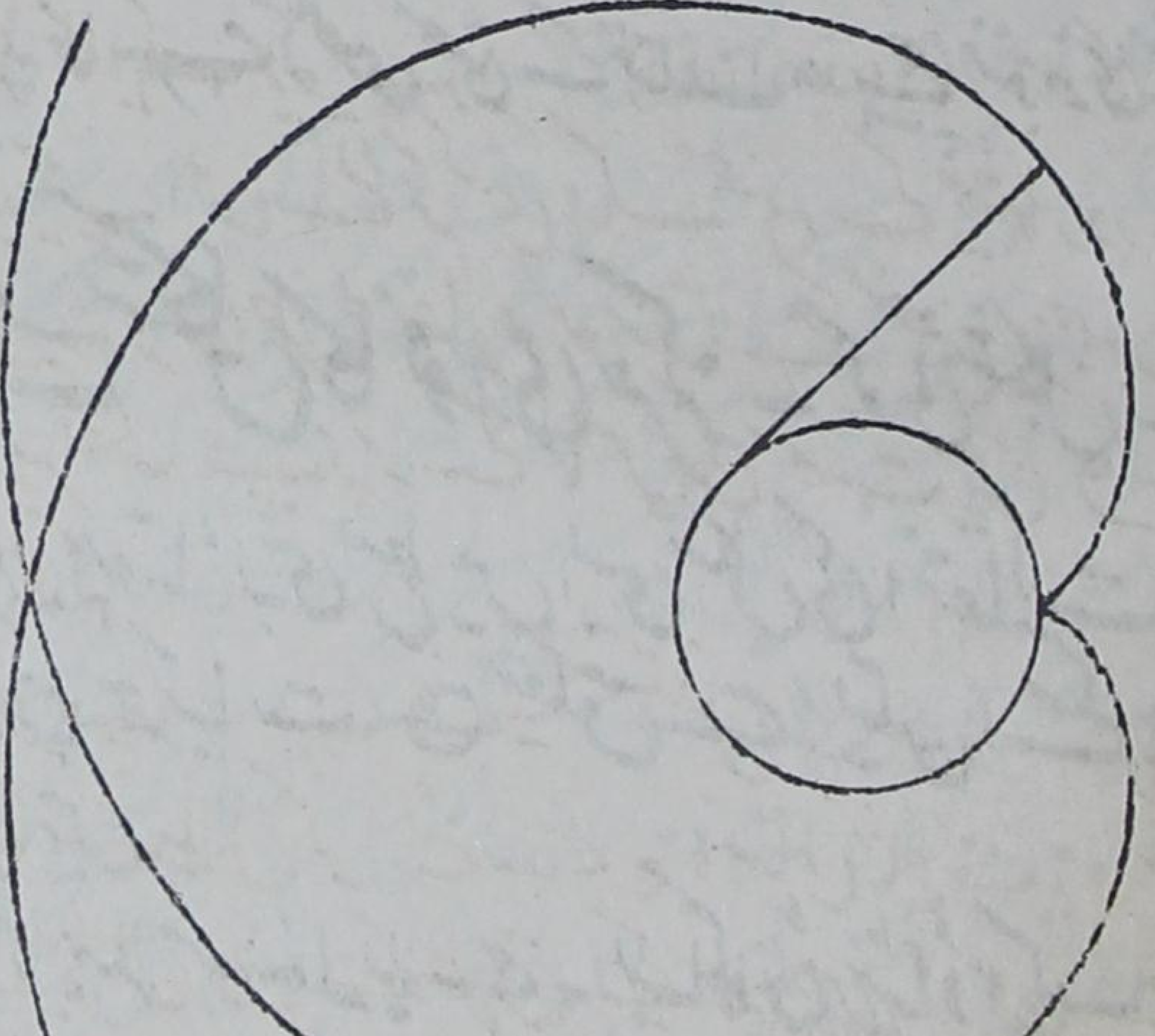
$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}} = \text{ر} = \text{ا سا} \quad .... (۲)$$

اگر سا کے مبدأ کا مناسب طور پر انتخاب کیا جائے - اسلئے تکمل کرنے سے

$$\text{س} = \frac{1}{2}\,\text{ا سا}^{2} \quad .... (۳)$$

کسی مستقل کا اضافہ کرنے کی ضرورت نہیں ہے اگر س کو قرن (سا = ۰) سے ناپنا شروع کیا جائے -

(دائرہ کی) اس خاص صورت میں ظاہر ہے کہ تمام دریچے منطابق طور پر مساوی ہیں اس لئے عام ذکر میں محض دائرہ کا دریچہ کہتے ہیں - یہ منحنی شکل ۱۲۰ میں دکھایا گیا ہے

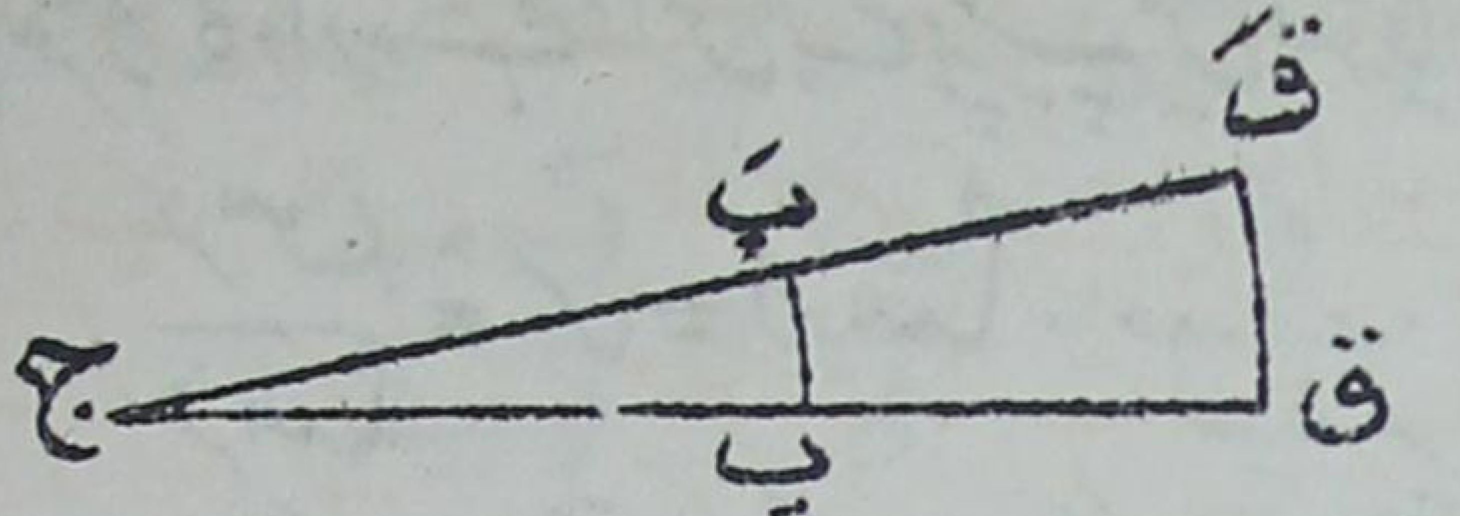


شکل (۱۲۰)

اگر کسی معلومہ منحنی کے عماد پر منحنی سے شروع ہو کر ایک مستقل طول ناپا جائے تو اس طرح جو نقطہ ملیگا اس کا طریق معلومہ منحنی کا "متوازی" کہلاتا ہے -

اگر ج پ، ج پَ منحنی کے دو متصل عماد ہوں اور متوازی منحنی کے متناظر ۳۵۶
نقطے ق اور قَ ہوں تو پ ق = پَ قَ

چونکہ ج پ اور ج پَ کا فرق دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے اس لئے



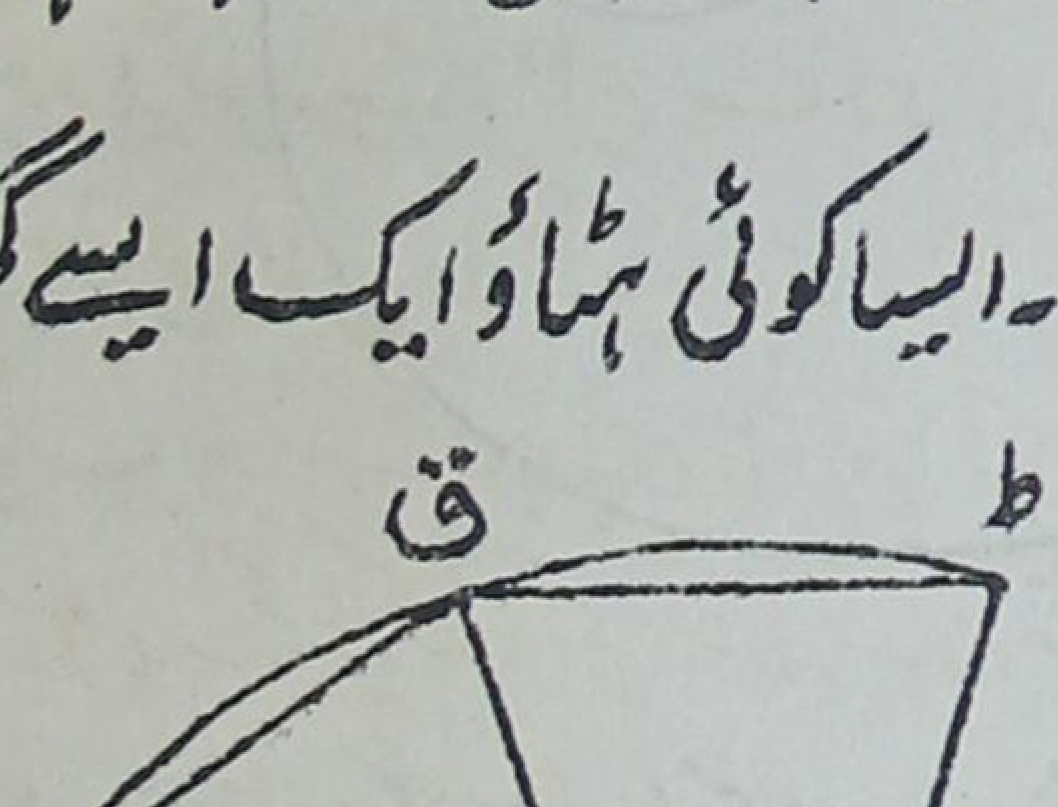
شکل (۱۲۱)

معلوم ہوتا ہے کہ ج ق اور ج قَ کا فرق بھی ایسے ہی دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے اور اس لئے مثلث ج ق قَ کے زاویے ق اور قَ آخر الامر زاویے قائمہ ہیں۔ اس لئے ج ق اور ج قَ متوازی منحنی کے عماد ہیں۔ اس لئے دو متوازی منحنیات کے وہی عماد ہوتے ہیں اور وہی برپیچ۔ دوسرے الفاظ میں متوازی منحنی ایک ہی منحنی کے درپیچے ہوتے ہیں۔

برعکس اسکے یہ ظاہر ہے کہ کسی منحنی کے مختلف درپیچے متوازی منحنیات کا ایک نظام بناتے ہیں۔

۱۴۵۔ متحرک شکل کا فوری مرکز۔ کوئی شکل ہے جسکی بناوٹ میں تغیر واقع نہیں ہوتا، اپنی سطح میں ایسی شکل کی انتقالیت یا (ہٹاؤ) کا نظریہ ٹھیک طور پر حرکیات سے متعلق ہے، لیکن اسکے چند ہندسی استعمال دلچسپ ہیں۔

اس نظریہ کا پہلا مسئلہ یہ ہے۔ ایسا کوئی ہٹاؤ ایک ایسے گھماؤ کے معادل ہے جو کسی محدود یا لامحدود فاصلہ پر کے ایک نقطہ کے گرد وقوع پذیر ہوتا ہے۔



شکل (۱۲۲)

ذیل میں اس کا ایک ثبوت درج ہے۔ پہلے محل میں شکل کے کوئی دو نقطے اَ بَ ہیں دوسرے محل میں وہی دو نقطے

اَ ب پر ہیں، کسی تیسرے نقطہ کا نیا مقام پ جو ابتدا میں پ پر تھا
مثلث اَ پ ب بنانے سے معلوم ہوتا ہے جو مثلث ا پ ب کے
بالکل منطابق ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ متحرک شکل کا مقام معین
کرنیکے لئے صرف دو نقطوں کے مقامات کا تعین کافی ہے۔

اب شکل کے کوئی سے نقطہ پر غور کرو، فرض کرو کہ پ اس کا ابتدائی
اور ق آخری مقام ہے اور شکل کے اس نقطہ کا مقام ط ہے جو ابتدا میں
ق پر تھا۔ چونکہ پ ق اور ق ط ایک ہی خط کے دو محل ہیں اسلئے
وہ باہم مساوی ہیں۔ اگر دائرہ پ ق ط کا مرکز س ہو تو مثلث
پ س ط، ق س ط منطابق ہیں یعنی نقطہ س دونوں محلوں
میں وہی نقطہ ہے۔ اس لئے ہٹاؤ س کے گرد گھماؤ کے معادل ہے۔ ۳۵۷
اس نقطہ کو "گھماؤ کا مرکز" کہتے ہیں۔

ایسا ہو سکتا ہے کہ پ ق اور ق ط ایک ہی خط مستقیم میں ہوں۔
ہٹاؤ ایسی صورت میں بغیر گھماؤ کے شکل کے محض نقل مکان کے معادل ہوگا
یا دوسرے الفاظ میں یہ کہا جا سکتا ہے کہ گھماؤ کا مرکز لامتناہی پر ہے۔

اس کے بعد کسی مستوی شکل کی مسلسل حرکت پر غور کرو جو صرف اس کے
اپنے مستوی میں وقوع پذیر ہوتی ہے۔ شکل کے صرف دو متصل محلوں پر اپنی
توجہ محدود رکھو۔ پہلے محل سے دوسرے محل میں شکل کسی خاص مرکز کے گرد
گھماؤ کے ذریعہ لائی جا سکتی ہے۔ اس نقطہ کا انتہائی محل جبکہ شکل کے دو مقام
یا محل ایک دوسرے سے لاانتہا قریب ہوں "فوری مرکز" کہلاتا ہے۔

اگر شکل کے ایک ہی نقطہ کے دو متصل محل پ، پَ ہوں اور
گھماؤ کا متناظر زاویہ مف طہ ہو تو گھماؤ کا مرکز (س) ایسے خط مستقیم
پر واقع ہوگا جو پ پَ کی علی القوائم تنصیف کرتا ہے اور زاویہ
پ س پَ مف طہ کے مساوی ہوگا۔ اس لئے اگر س سے
محدود فاصلہ پر کوئی نقطہ پ ہو تو اس کا لاانتہا چھوٹا ہٹاؤ آخرالامر س پ
کے علی القوائم ہوگا اور س پ × مف طہ کے مساوی ہوگا۔

اگر وقت کا عنصر بھی شریک کر لیا جائے اور شکل کے دو محلوں کے درمیان جو وقت کا وقفہ گزرتا ہے وہ مف ت سے تعبیر کیا جائے تو $\frac{\text{مف طہ}}{\text{مف ت}}$

کی انتہائی قیمت یعنی $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ "زاویٔ رفتار" کہلاتی ہے۔ شکل کے اس نقطہ کی رفتار جو فوری مرکز سے پر منطبق ہوتا ہے صفر ہے اور شکل کے کسی اور نقطہ پ کی رفتار سے پ پر علی القوائم ہے اور سے پ $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$

کے مساوی ہے۔

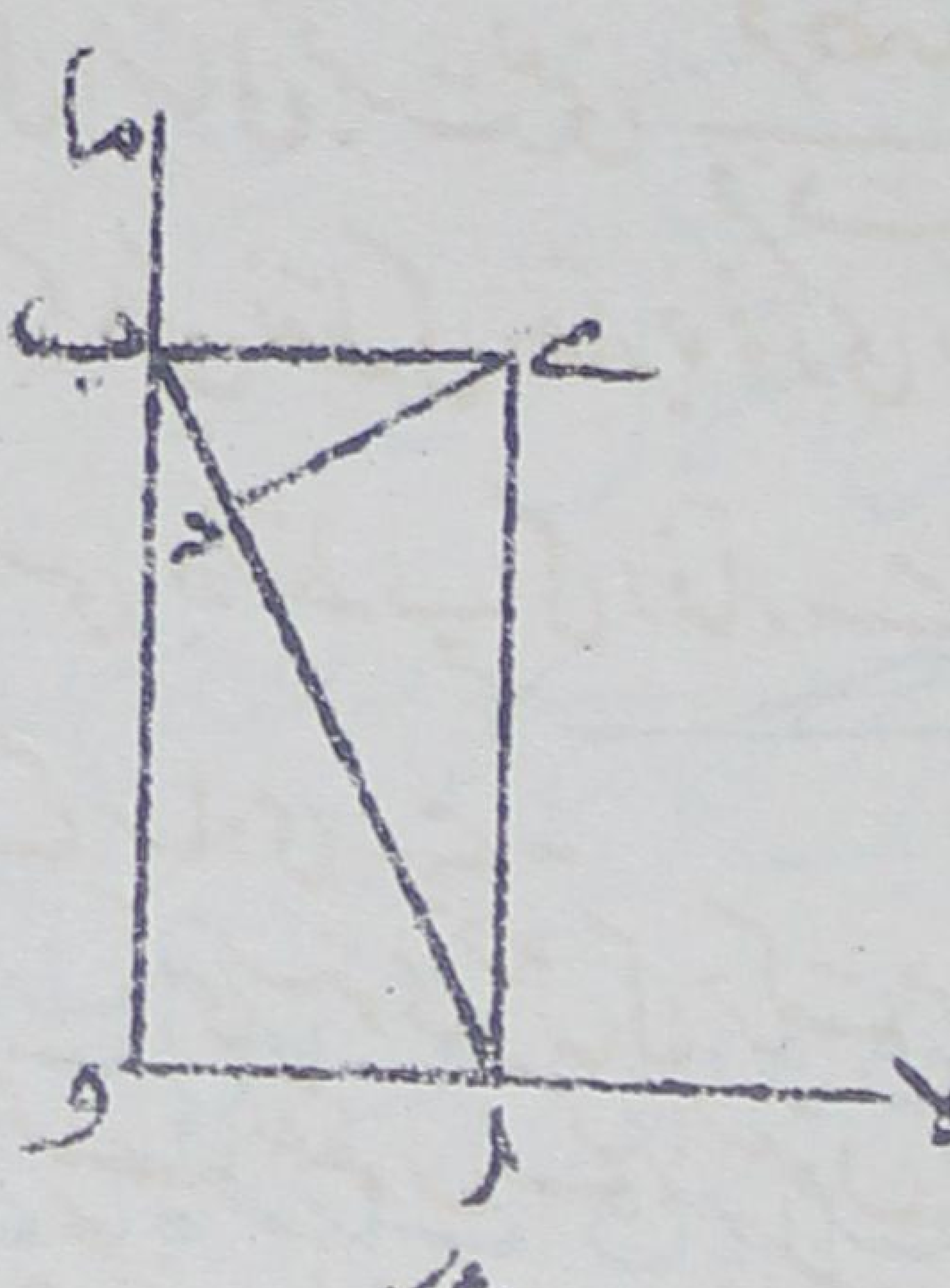
کسی مستوی شکل کی حرکت میں (جسکی وضع یا بناوٹ میں فرق نہیں آتا) مختلف نقطوں کے راستوں پر کے عماد سب کے سب فوری مرکز میں سے گذرتے ہیں۔ یہ امر ہندسی سوالات میں اکثر سودمند ثابت ہوتا ہے اگر شکل کے کسی دو نقطوں کے ہٹاؤں کی سمتیں معلوم ہوں تو فوری مرکز معلوم ہو سکتا ہے کیونکہ یہ ان عمادوں کا نقطہ تقاطع ہے جو ان نقطوں کی حرکت کی سمتوں پر کھینچے جائیں۔ اس کے بعد باقی تمام نقطوں کے جو ہٹاؤ ہیں ان کی سمتیں اور اضافی مقداریں متعین ہو سکتی ہیں۔

بعد ازیں متحرک شکل میں اگر کوئی خط (سیدھا یا ٹیڑھا) ہو تو ظاہر ہے کہ اس خط کے انتہائی تقاطع کا نقطہ یا نقاط اسکے متصل محل کے ساتھ صرف ان عمادوں کے پائے ہو سکتے ہیں جو فوری مرکز سے خط پر کھینچے جائیں کیونکہ خط کا کوئی اور نقطہ ایسی سمت میں حرکت کر رہا ہے جو اس کے ساتھ محدود زاویہ بناتی ہے۔

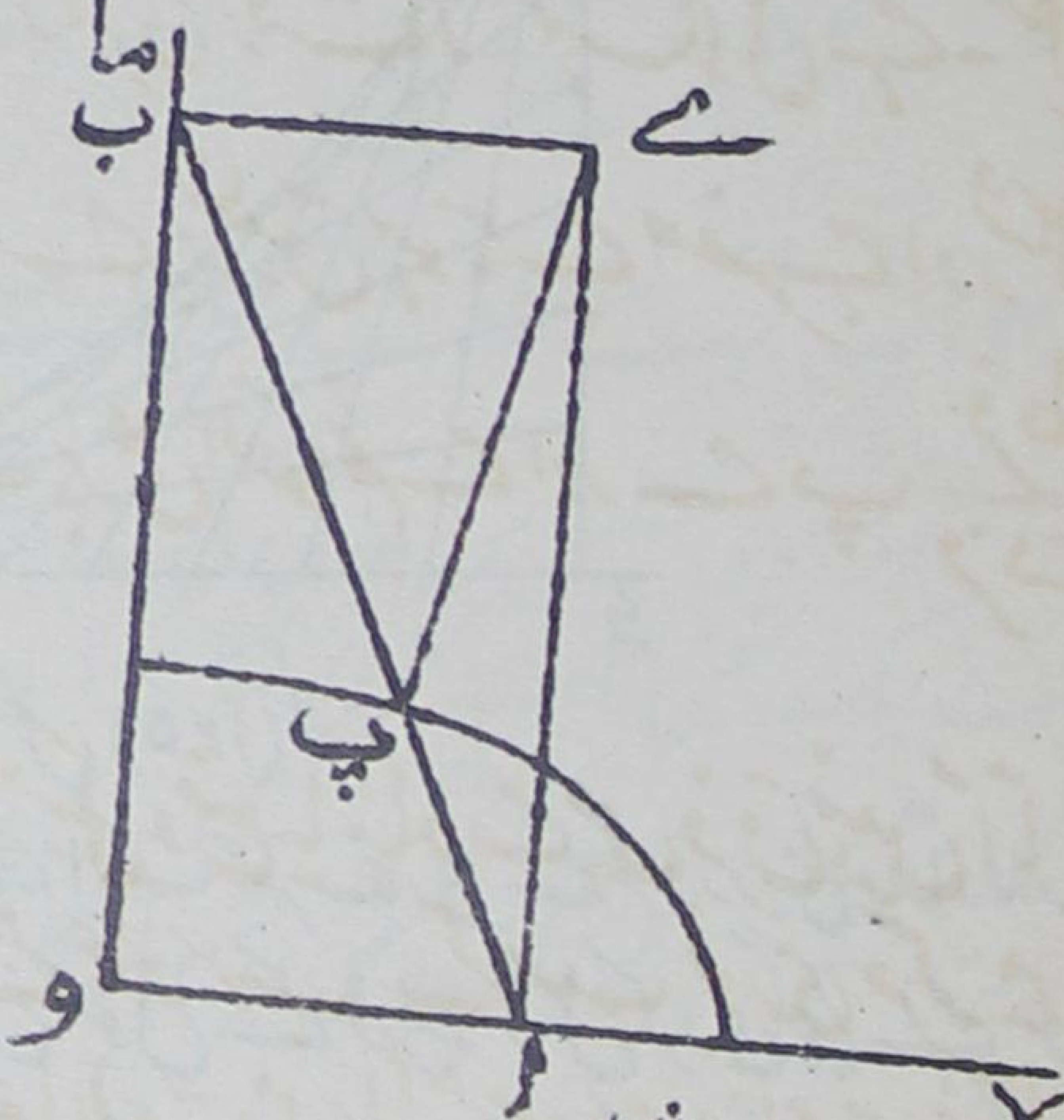
مثال ۱۔ مستقل طول کا سیدھا خط ا ب ہے، اس کے سرے دو سیدھے علی القوائم خط و لا، و ما پر تسم کرتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ خط پر کا کوئی نقطہ پ قطع ناقص مرتسم کرتا ہے جس کے صدری محور و لا اور و ما کی سمتوں میں ہیں۔ اوپر کے مسئلہ سے اس قطع ناقص کے

۳۹۸ نقطہ پ پر عماد کھینچنے کا عمل حاصل ہوتا ہے اور وہ یہ ہے۔ و لا اور و ما پر بالترتیب عمود اے، بے کھینچو، ے فوری مرکز ہے اور ے پ مطلوبہ عماد ہے۔ دیکھو شکل ۱۲۳۔



شکل (۱۲۴)



شکل (۱۲۳)

مثال ۲۔ گزشتہ مثال میں متحرک خط اب کا انتہائی تقاطع اس کے متصل مقام کے ساتھ نقطہ د ہے (شکل ۱۲۴) جو فوری مرکز ے سے خط اب پر عمود کا پایہ ہے۔ اب اگر

اب = ل، ∠ و اب = فہ

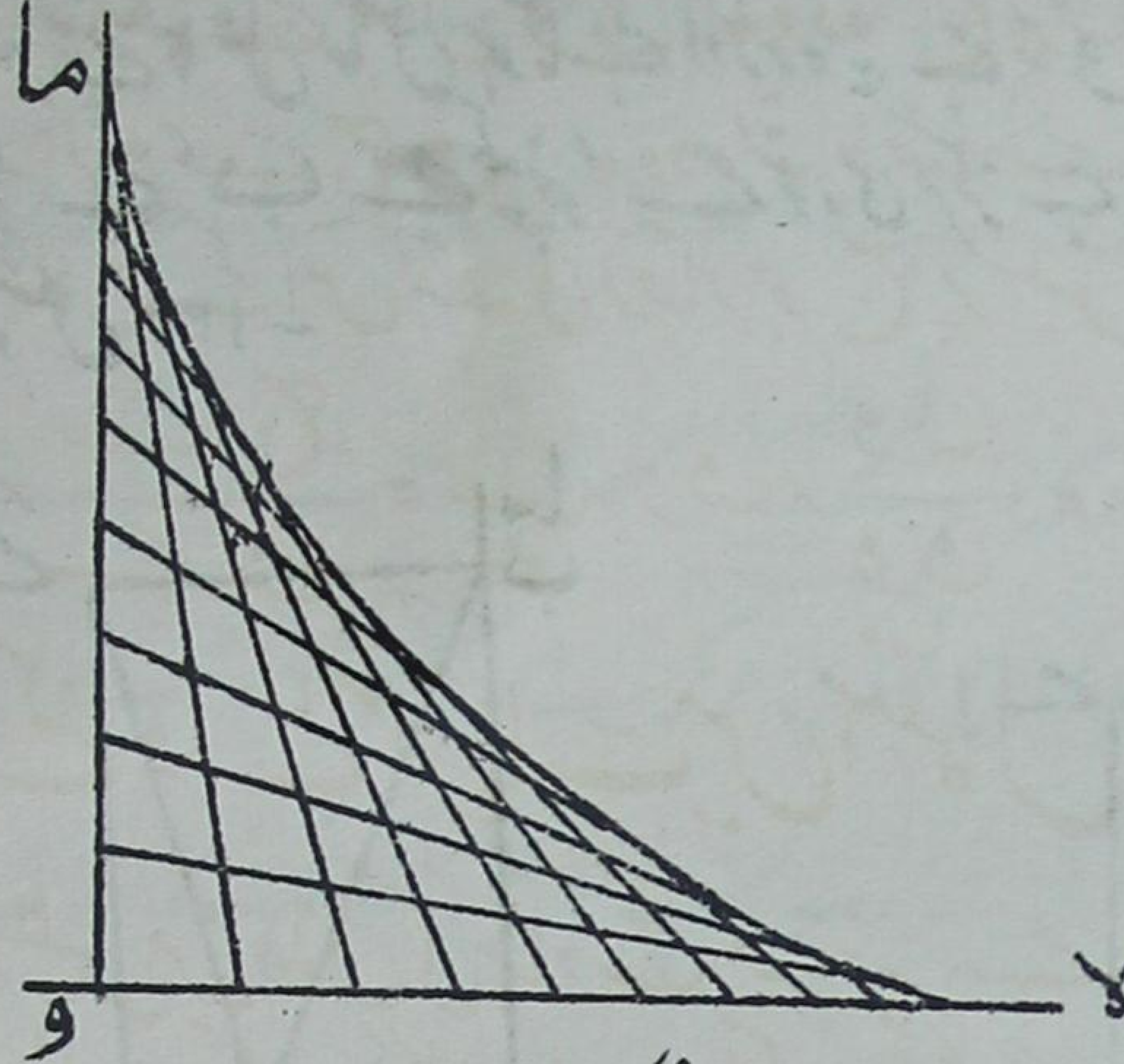
تو د کے محدد ہیں

لا = ب د جم فہ = ب ے جم^{2} فہ = ل جم^{3} فہ
ما = ا د جب فہ = ا ے جب^{2} فہ = ل جب^{3} فہ } ......(۱)

اس لئے اب کا لفاف ستارہ نما

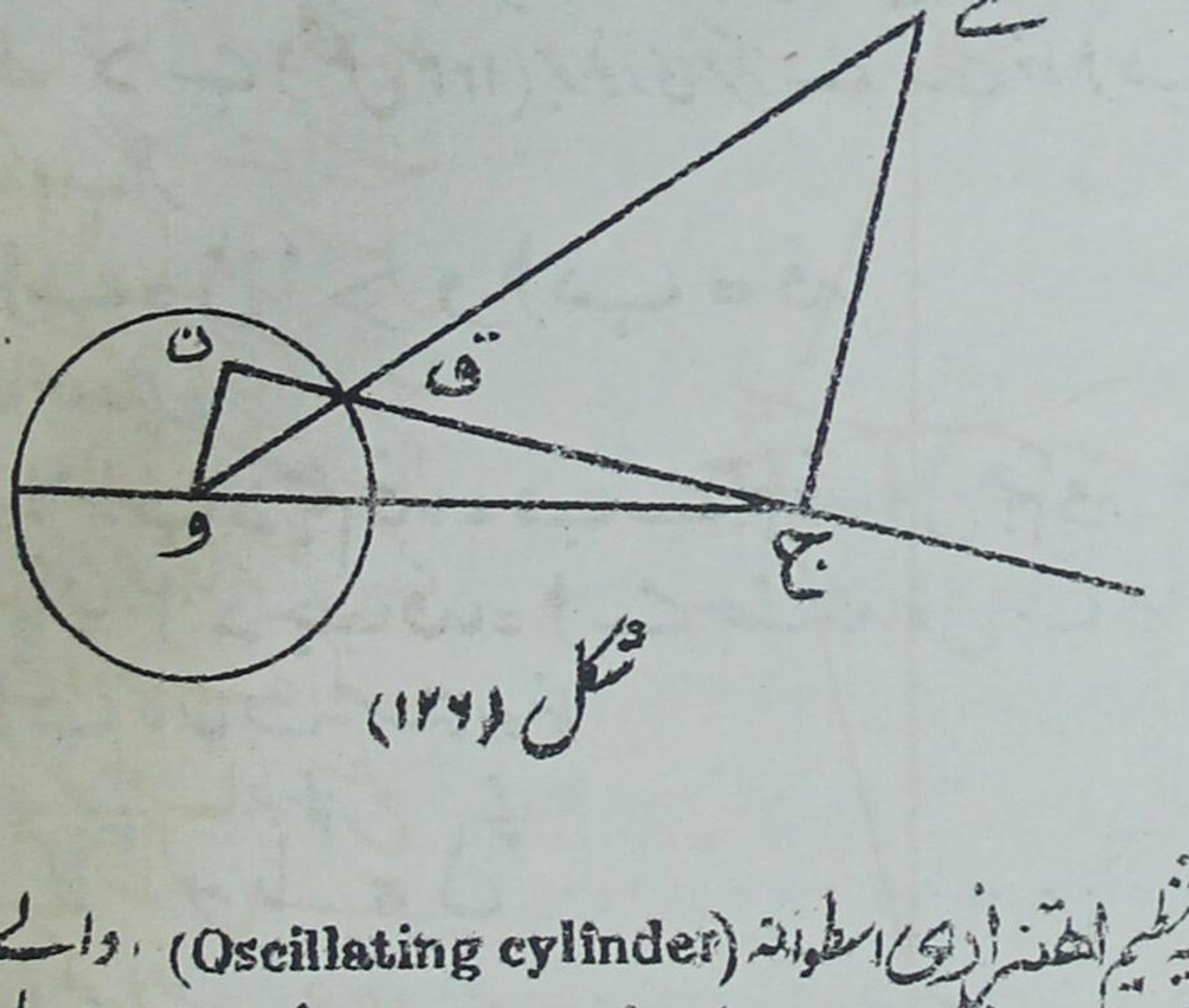
لا$^{2/3}$ + ما$^{2/3}$ = ل$^{2/3}$ ....(۲)

ہے، مقابلہ کرو دفعہ ۱۲۴ مثال ۴ کے ساتھ۔



شکل (۱۲۵)

مثال ۳- ایک بازو و ق اپنے ایک سرے و کے گرد زاویٔ رفتار ســہ کے ساتھ گھومتا ہے، ق پر ایک سلاخ چول کے ذریعہ وصل کردی گئی ہے جو ایک ثابت نقطہ ج میں سے لازماً گذرتی ہے۔ اس سلاخ کی رفتار اس کے طول کی سمت میں مطلوب ہے۔ ۲۵۹



شکل (۱۲۶)

دراصل یہ تنظیم اھتزازی اسطوانہ (Oscillating cylinder) والے بھاپ انجن کے کرنیک اور فتارہ میں پائی جاتی ہے جس میں نقطہ ج اسطوانہ کے چول خط پر واقع ہوگا۔

فوری مرکز وہ نقطہ ہے جہاں و ق ممدودہ، ج پر فتارہ کی سمت کے عمود وار خط کو قطع کرتا ہے۔ اگر و سے ج ق (ممدودہ بشرط ضرورت) پر عمود و ن کھینچا جائے تو سلاخ کے اِس نقطہ کی رفتار جو ج پر منطبق ہوتا ہے یہ ہوگی

سہ × و ق × ےج / ےق = سہ × و ق × ون / وق = سہ × و ن ...(۳)

۱۴۶۔ لڑکنے والے منحنیات میں استعمال۔

دو مستوی شکلیں ہیں، دونوں کی بناوٹ غیر متغیر ہے۔ دونوں شکلوں میں ایک ایک منحنی ثابت طور پر لگا ہوا ہے ایک شکل کا یہ منحنی دوسری شکل کے منحنی پر بغیر پھسلنے کے لڑکتا ہے۔ ایسی صورت میں ہر شکل کا کوئی نقطہ بلحاظ دوسری شکل کے ایک منحنی مرتسم کریگا، منحنی جو اس طور پر مرتسم ہو اسے گردونیہ کہتے ہیں۔

جن صورتوں میں لڑکنے والے منحنی دائرے ہیں وہ دفعات ۱۲۲ تا ۱۲۴ میں زیر بحث آچکی ہیں۔

گردونیوں کا عام نظریہ علم ہندسہ اور حرکیات میں اسوجہ سے اہمیت رکھتا ہے کہ کسی شکل کی کوئی مسلسل حرکت، خود اپنی سطح مستوی میں اس حرکت پر مشتمل خیال کیجا سکتی ہے کہ ایک خاص منحنی جو بلحاظ شکل کے ثابت ہے دوسرے ایک خاص منحنی پر جو بلحاظ سطح مستوی کے ساکن ہے لڑکتا ہے۔ دیکھو دفعہ ۱۴۹ جب ایک مستوی منحنی ایک

شکل (۱۲۷)

ایسے منحنی پر لڑکتا ہے جو ثابت خیال کیا جا سکتا ہے تو حرکت کا فوری مرکز نقطہ تماس ہے۔

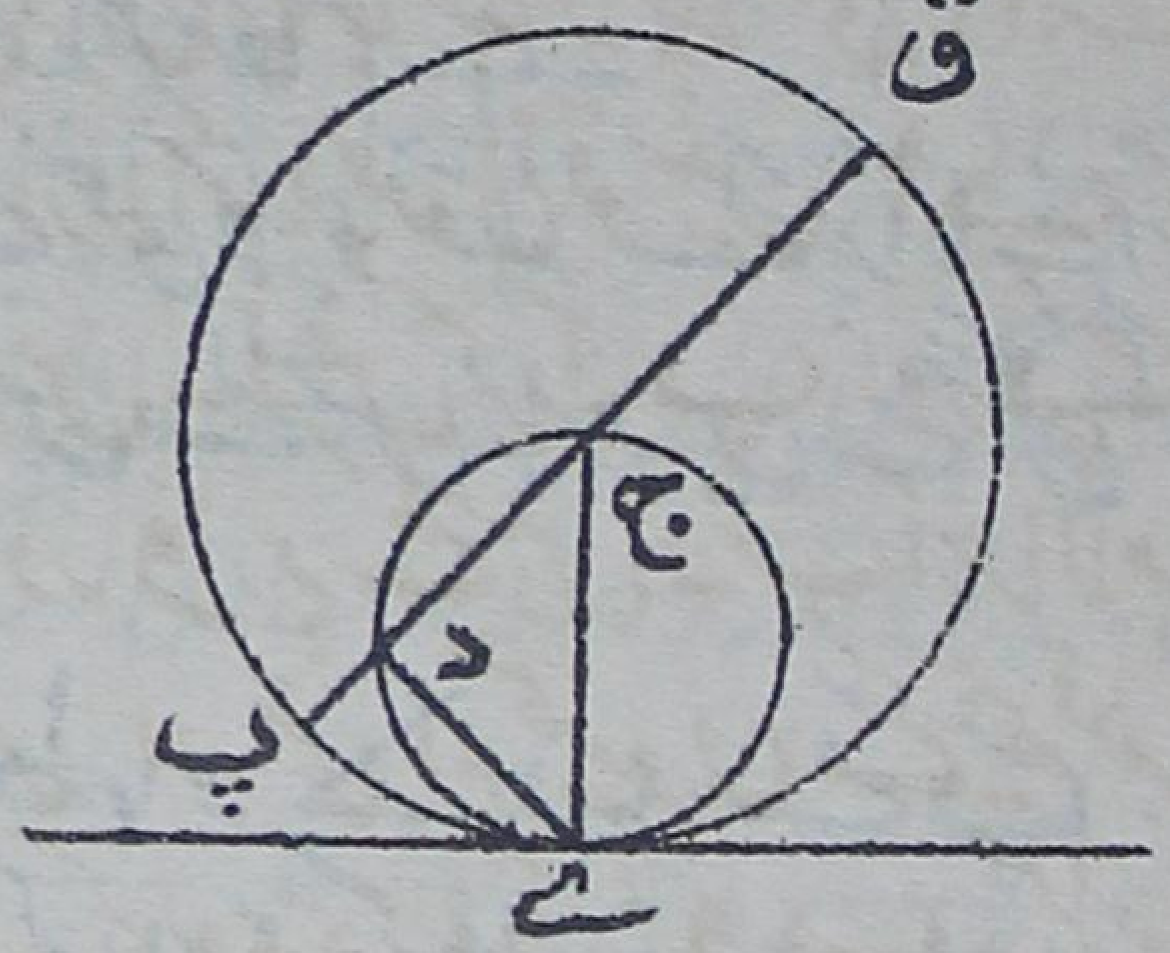
صفحۂ گذشتہ کی شکل میں فرض کیا جائیگا کہ نچلا منحنی ثابت ہے۔ فرض کرو کہ ۳۶۰
ا نقطہ تماس ہے اور لاانتہا چھوٹی قوسیں اپ، اپَ (= مف س) دو منحنیوں پر بنائی گئی ہیں۔ فرض کرو کہ پ اور پَ کے عماد، ا پر کے عماد سے نقاط و اور وَ پر ملتے ہیں۔ تب آخرالامر و ا = ر اور وَا = رَ جہاں ر اور رَ دو منحنیوں کے نیم قطر انحنا ہیں نقطہ ا پر۔ لاانتہا چھوٹے ہٹاؤ کے بعد پَ وَ، وپ کے ساتھ ایک ہی خط مستقیم میں آجائیگا اسوقت دونوں منحنی پ پر تماس میں ہونگے۔ اس لئے زاویہ (مف طہ) جس میں سے لڑکنے والا منحنی پھریگا اور جو وپ اور پَ وَ کے درمیانی حادہ زاویہ ہے کے مساوی ہے و اور وَ پر کے زاویوں کے مجموعہ کے مساوی ہوگا، اسلئے آخرالامر

مف طہ = مف س / ر + مف س / رَ ......(۱)

اب وتر اپ، اپَ آخرالامر مساوی ہیں اور ان کے درمیان ا پر لاانتہا چھوٹا زاویہ بنتا ہے، اسلئے فاصلہ پ پَ آخرالامر مف س میں دوسرے رتبہ کا ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ جب، مف س کو لاانتہا کم کیا جائے تو گھماؤ کے مرکز (دے) کا انتہائی محل ا پر منطبق ہوتا ہے کیونکہ اگر یہ مرکز اس نقطہ سے محدود فاصلہ پر ہو تو پَ کا ہٹاؤ جو دفعہ ۱۴۵ کی رو سے دے پَ مف طہ کے مساوی ہے مف س میں صرف پہلے رتبہ کا ہوگا۔

پس جب ایک منحنی ایک ثابت منحنی پر لڑکتا ہے تو ان سب نقطوں کے راستوں کے عماد، جو متحرک منحنی کے ساتھ تعلق رہتے ہیں نقطہ تماس میں سے گذرتے ہیں۔ اس نتیجہ کی مثالیں اس سے قبل دفعات ۱۲۲، ۱۲۳ میں، تدویری اور استداری منحنیات کی ضمن میں آچکی ہیں۔ نیز اگر ایک خط مستقیم

کسی منحنی پر لڑکے تو اس کے کسی نقطہ کے راستہ پر یہ خط مستقیم عماد ہوگا (دفعہ ۱۴۲)



شکل (۱۲۸)

اس کے بعد اگر ایسے خط (سیدھے یا ٹیڑھے) پر غور کیا جائے جسے لڑکنے والا منحنی ساتھ اٹھائے پھرتا ہے تو اس سوار منحنی کے انتہائی نقاط نقاطع، اپنے متصل مقام کے ساتھ ان عمادوں کے پائے ہونگے جو نقطہ تماس سے سوار منحنی تک کھینچ سکتے ہیں۔ اور سوار خط کا لفاف ان پایوں کا طریق ہوگا۔

مثال ۱۔ ایک دائرہ ایک ثابت خط مستقیم پر لڑکتا ہو تو اس کا کوئی قطر خط تدویر کو لف کرتا ہے۔ ۳۶۱

لڑکنے والے دائرہ کا مرکز ج ہے، ے اس کا نقطہ تماس ہے، ے د قطر پ ق پر عمود ہے۔ چونکہ د ایسے دائرہ پر واقع ہے جس کا قطر ج ے ہے اس لئے یہ دیکھنا آسان ہے کہ اگر چھوٹا دائرہ ہمیشہ بڑے دائرہ کی زاوی رفتار کے دوچند سے لڑکتا فرض کیا جائے تو ثابت خط کے ساتھ اس کا نقطہ تماس وہی ہوگا اور نقطہ د اس طرح حرکت کریگا گویا چھوٹا دائرہ اسے اٹھائے ہوئے ہے۔

اس لئے اسکا طریق خط تدویر ہے۔

مثال ۲۔ اسی طرح اگر ایک دائرہ (ا) ایک ثابت دائرہ (ب) پر لڑکتا ہو تو ا کے کسی قطر پر کا لفاف ایسا "بر" یا "در تدویر" ہوگا جو ا کے نصف ناپ کے دائرہ کو ب کے محیط پر لڑکانے سے پیدا ہوسکتا ہے۔

۱۴۷۔ نقطہ گردو نیہ کا انحنا۔ فرض کرو کہ کوئی نقطہ پ بلحاظ لڑکنے والے

۱

منحنی کے ایک ثابت نقطہ ہے، اس نقطہ کے راستہ کا انحنا معلوم کرنے کیلئے فرض کرو کہ ے نقطہ تماس ہے اور ےَ متصل نقطہ تماس ہے اور پَ، پ کا متناظر مقام ہے۔

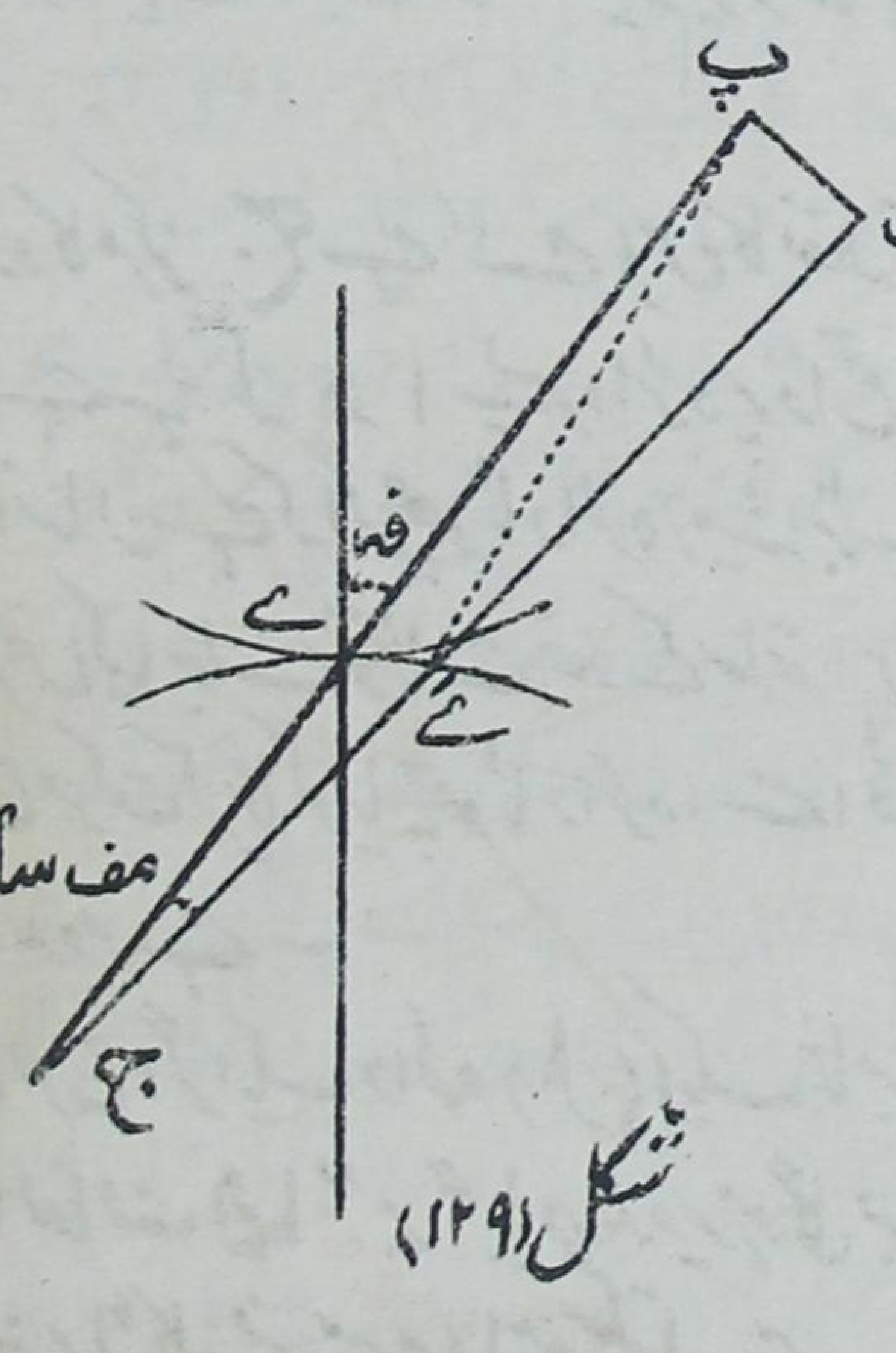
چونکہ لڑھکنے والے منحنی کا جو نقطہ ےَ پر آتا ہے اسکا ہٹاؤ دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے اس لئے جس زاویہ میں سے شکل گھوم جاتی ہے وہ انتہائی صورت میں ہے

$$\text{مف طہ} = \angle\, \text{پ ےَ پَ} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

فرض کرو کہ پ کے راستہ کے عماد پ ے اور پَ ےَ خارج ہوکر ایک دوسرے سے ج پر ملتے ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ مف سا ہے تو

$$\text{مف سا} = \angle\, \text{ے ج ےَ} = \frac{\text{مف س} \times \text{جم فہ}}{\text{ج ے}} \quad \ldots\ldots (۲)$$

جہاں فہ وہ زاویہ ہے جو ے پ، ے پر کے عماد کے ساتھ بناتا ہے



شکل (۱۲۹)

۳۶۲ نیز شکل سے مف سا = ∠ پ ےَ پَ - ∠ ے پ ے

$= \text{مف طہ} - \frac{\text{مف س. جم فہ}}{\text{پ ے}}$

$= \text{مف س} \left(\frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{رَ}} - \frac{\text{جم فہ}}{\text{پ ے}}\right)$ .... (۳)

دفعہ ۱۴۶ (۱) کی رو سے اگر ر اور رَ ثابت اور لڑ کنے والے منحنیوں کے انحنا کے نیم قطر ہوں۔ (۲) اور (۳) کو مساوی رکھنے سے

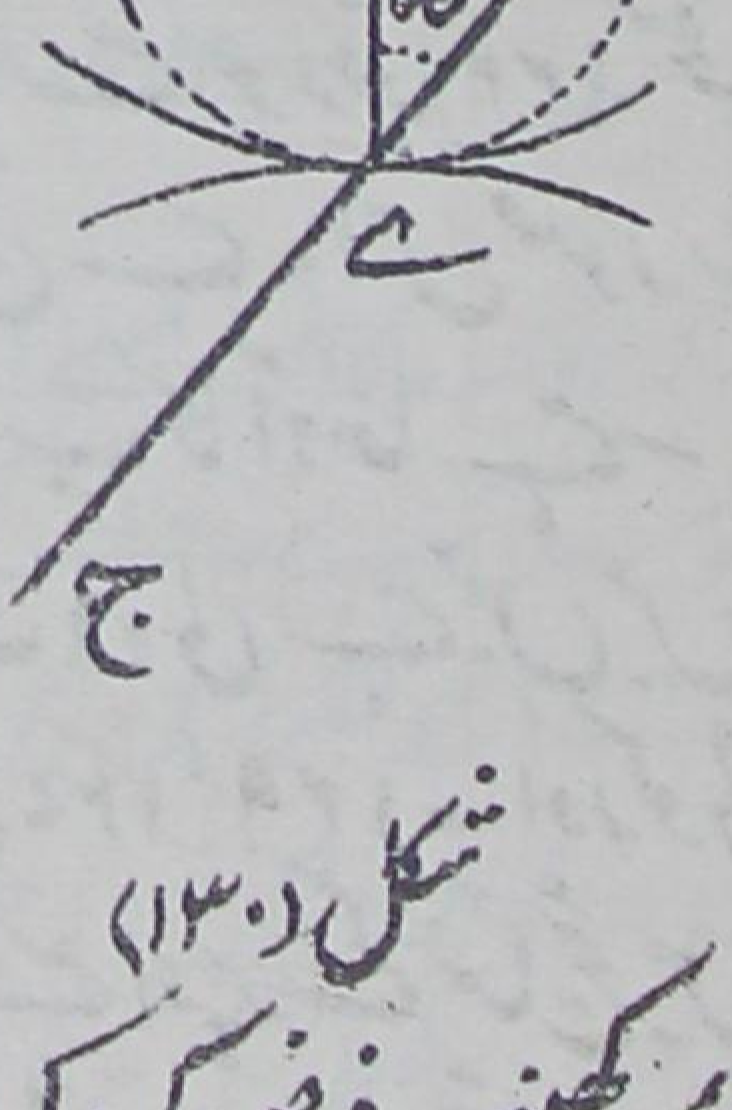
$\text{جم فہ}\left(\frac{1}{\text{ج ے}} + \frac{1}{\text{ے پ}}\right) = \frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{رَ}}$ .... (۴)

اس سے ج کا انتہائی مقام یعنی پ کے راستہ کا مرکز انحنا حاصل ہوتا ہے۔ نیم قطر انحنا اس کے بعد حاصل ہو گا

$\text{غہ} = \text{ج پ} = \text{ج ے} + \text{ے پ}$ ..... (۵)

(۴) اور (۵) میں جو نتیجہ مشتمل ہے اسے سادہ ہندسی شکل میں یوں لکھا جا سکتا ہے۔ ے پر کے عماد پر طول ے ھ ایسا کاٹو کہ

$\frac{1}{\text{ے ھ}} = \frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{رَ}}$ .... (۶)



شکل (۱۳۰)

اور ے ھ کے قطر پر دائرہ کھینچو۔ فرض کرو کہ ے پ اس دائرہ ٥ کو

ق پر ملتا ہے۔ تب

$$\left(\frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{ر'}}\right) \text{قط فہ} = \frac{1}{\text{ے ھ جم فہ}} = \frac{1}{\text{ے ق}}$$

اس لئے رشتہ (۴) یہ شکل اختیار کرتا ہے

$$\frac{1}{\text{ج ے}} + \frac{1}{\text{ے پ}} = \frac{1}{\text{ے ق}} \quad \ldots\ldots\ldots (۷)$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر پ، ق پر منطبق ہو جائے تو ج ے لامتناہی ہوگا یعنی متحرک شکل کا کوئی نقطہ جو اُس دائرہ پر واقع ہو جس کی ابھی تعیین کی گئی راستہ کے نقطہ انعطاف پر ہوگا۔ اس وجہ سے دائرہ زیر بحث کو "انعطافوں کا دائرہ" کہتے ہیں۔

(۷) اور (۵) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ج ے} = \frac{\text{ے پ} \times \text{ے ق}}{\text{ق پ}}, \quad \text{غہ} = \frac{\text{ے پ}^{2}}{\text{ق پ}} \quad \ldots\ldots (۸)$$

آخر کے نتیجہ سے ظاہر ہے کہ غہ، ق پ کے ساتھ علامت بدلتا ہے یعنی متحرک شکل کے مختلف نقطوں کے راستے ے کی جانب مقعر یا محدب ہیں بموجب اسکے کہ وہ انعطافوں کے دائرہ کے ایک جانب واقع ہیں یا دوسری جانب۔ اوپر کی معیاری صورت میں یہ راستے ے کی طرف مقعر ہیں اگر پ دائرہ کے باہر ہو اور محدب ہیں اگر پ اندر ہو۔
۴۶۴ استداری منحنیات سے جو دفعہ ۱۲۲ صفحہ (۴۰۳) پر دے گئے ہیں اسکی ایک مثال اس پر آتی ہے۔ اس صورت میں انعطافوں کا دائرہ لڑھکنے والے دائرہ کے ناپ کا آدھا ہے۔

ہم نے معیاری صورت وہ لی ہے جس میں دو منحنی بلحاظ ایک دوسرے کے محدب ہیں دیکھو اشکال ۱۲۷، ۱۲۹۔ اور کوئی صورت ر اور ر' کو مناسب علامات دینے سے اوپر کے نتائج میں شریک کر لیجا سکتی ہے۔

سکونیات میں "جھولنے والے پتھروں" کی حرکت میں اوپر کا نظریہ

استعمال ہوتا ہے۔ جب ایک کھردرا جسم فقط ایک نقطہ تماس کے ذریعہ دوسرے جسم پر ساکن ہوتا ہے تو اس کا مرکز ثقل انتصاباً نقطہ تماس کے اوپر واقع ہوتا ہے اور توازن کے قائم ہونیکے لئے یہ ضروری ہے کہ مرکز ثقل کا راستہ، کسی لڑھکنے کے ہٹاؤ کی صورت میں، اوپر کی جانب مقعر ہو۔

مثال ۱۔ خط تدویر میں اگر مکون دائرہ کا نیم قطر ا ہو تو

ر = ∞، ر َ = ا، ے پ = ۲ ا جم فما

(۴) میں درج کرنے سے

ج ے = ۲ ا جم فما = ے ب ...... (۱۰)

اس لئے غما = ۲ ے پ .... (۱۱)

مثال ۲۔ برتدویر (دفعہ ۱۲۳) میں

ر = ا، ر َ = ب، ے پ = ۲ ب جم فما ..... (۱۲)

جس سے ج ے = $\frac{۲ ا ب}{ا + ۲ ب}$ جم فما = $\frac{ا}{ا + ۲ ب}$ ے پ ..... (۱۳)

غما = $\frac{۲ (ا + ب)}{ا + ۲ ب}$ ے پ .... (۱۴)

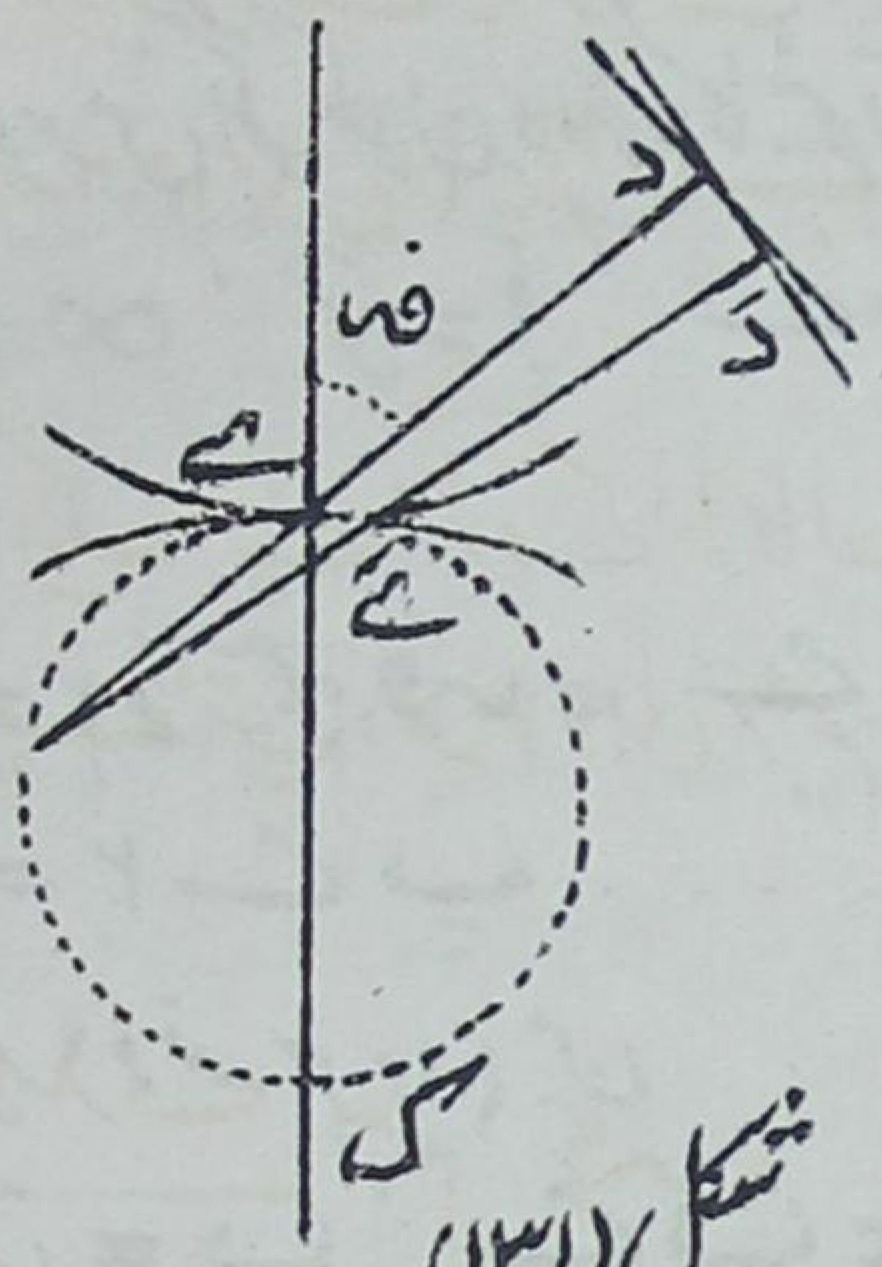
یہ قابل توجہ ہے کہ اگر ب = − $\frac{ا}{۲}$ تو غما = ∞، مقابلہ کرو دفعہ ۱۲۴ مثال ۲ کے ساتھ۔

۱۴۸۔ خط گردونیہ (Line Roulette) کا انحنا۔

خط گردونیہ کا انحنا یعنی ایک ایسے خط مستقیم کے لفاف کا انحنا جسے لڑھکنے والا منحنی اٹھائے پھرتا ہے، زیادہ آسانی سے حاصل ہوسکتا ہے۔ خط کے دو متصل مقامات پر فوری مرکز کے تناظر مقامات سے (جو فضا میں ہیں) عمود ے د، ے َ د َ نکالے گئے ہیں، یہ لفاف کے عماد ہیں اور جو زاویہ یہ اپنے تقاطع (ج) پر ایک دوسرے سے بناتے ہیں وہ گھماؤ کے زاویہ ∆ ف، طما کے مساوی ہے۔

اگر ے د لڑکنے والے منحنی کے نقطہ ے پر کے عماد کے ساتھ زاویہ فہ بنائے اور ے ہے = مف س تو انتہائی صورت میں

$$\text{مف س جم فہ} = \text{ج ے مف طہ} \quad \ldots\ldots (۱)$$



شکل (۱۳۱)

۳۶۴ اس لئے دفعہ ۱۴۶(۱) سے مف طہ کی قیمت درج کرنے سے

$$\frac{\text{جم فہ}}{\text{ج ے}} = \frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{ر'}} \quad \ldots\ldots (۲)$$

لفاف کا نیم قطر انحنا حاصل ہوگا،

$$\text{غہ} = \text{ج ے} + \text{ے د} \quad \ldots\ldots (۳)$$

لڑکنے والے منحنی کے نقطہ ے پر جو عماد ہے اوس پر طول ے گ ایسا ناپو کہ

$$\frac{1}{\text{ے گ}} = \frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{ر'}} \quad \ldots\ldots (۴)$$

دفعہ گذشتہ میں ناپنے کی جو سمت ہے اسکی مخالف سمت یہ طول ناپا جائے۔ ے گ کے قطر پر دائرہ کھینچو۔ (۲) سے ظاہر ہے کہ ج اس دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں لڑکنے والے

متحنی کے کسی معلومہ مقام کے لئے تمام خط گیر دونیول کے انحنا کے مرکزونکا طریق ایک دائرہ ہے۔ اور جب بر داشتہ خط ک یں سے گذرے تو د ج پر منطبق ہوگا اور ج لفاف پر ساکن نقطہ (دفعہ ۱۳۳) ہوگا۔ اوپر کے دائرہ کو اس لئے قرنول کا دائرہ کہا جاتا ہے۔

مثال ۱۔ اگر خط تدویر کو ایسے دائرہ کے ایک قطر کا لفاف خیال کیا جائے جو ایک ثابت خط مستقیم (دفعہ ۱۴۶ مثال ۱) پر لڑکتا ہے تو یہ مستنبط ہوتا ہے کہ نیم قطر انحنا عماد کا دوچند ہے۔

مثال ۲۔ "برتدویر" کو ایک ایسے دائرہ کے قطر کا لفاف سمجھکر جو ایک اور ثابت دائرہ پر لڑکتا ہے تکوین کی گئی ہے، تب دفعہ ۱۲۳ کی ترمیم کے مطابق س = ا' ر' = ۲ ب اور اسلئے (۲) سے

د ے = ۱ / (ا + ۲ب) فہ = ۲ اب / (ا + ۲ب) جم = ج ے

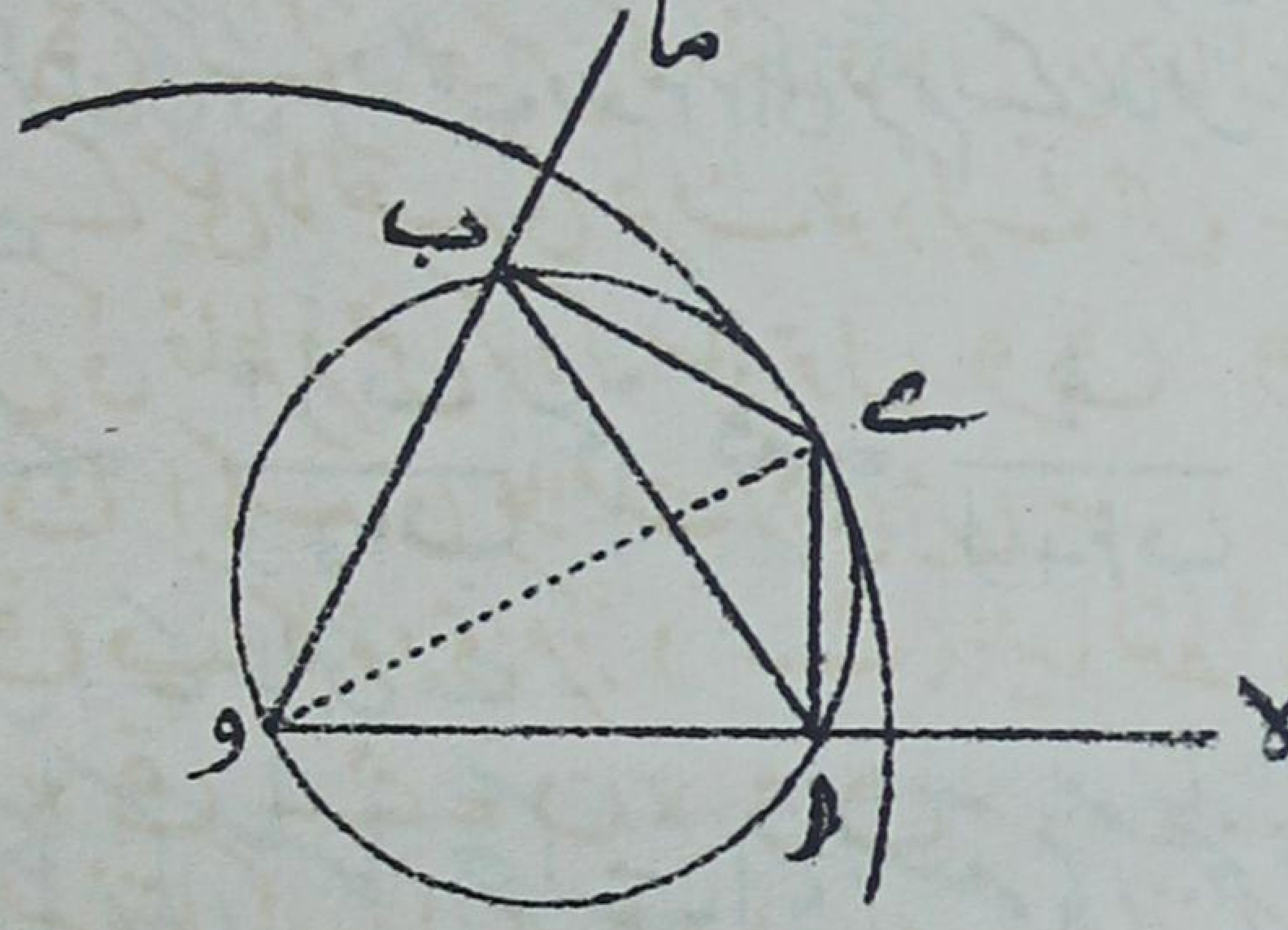
جو دفعہ ۱۴۷ مثال ۲ کے مطابق ہے۔

۱۴۹۔ کسی شکل کی مسلسل حرکت اپنی مستوی سطح میں۔

کوئی مستوی شکل اپنی مستوی سطح میں متحرک ہے، اسکے مختلف محلوں کے مسلسل سلسلہ پر غور کرو۔ فوری مرکز کا فضا میں ایک خاص طریق (لوکس) ہوگا اور شکل کے اندر بھی ایک خاص طریق ہوگا۔ ایسے منحنیوں کو جنکی اوپر تعریف ہوئی مرکز طریق کہتے ہیں، اول الذکر کو ہم فضائی مرکز طریق کہینگے اور موخر الذکر کو جسمی مرکز طریق۔ جس مسئلہ کا دفعہ ۱۴۶ میں حوالہ دیا گیا ہے وہ یہ ہے کہ شکل کی کوئی معلومہ حرکت جسمی مرکز طریق کے فضائی مرکز طریق پر بغیر پھسلنے کے لڑکنے سے پیدا ہو سکتی ہے۔

شکل کے کسی معلومہ محل پر غور کرو، فرض کرو کہ ے اس کا فوری مرکز ہے اور ے، ذ' بالترتیب متصل متناظر نقطے ہیں جسمی مرکز طریق اور فضائی مرکز طریق پر۔

فرض کرو کہ جسم زاویہ مف طہ میں سے گھومتا ہے جیسے فوری
مرکز ے سے ژ پر چلا جاتا ہے۔
تب انتہائی صورت میں دفعہ ۱۴۵ کی رُو سے ۳۶۵
ے ےَ = ے ژ اور ےَ ژ = ے ےَ مف طہ
اس لئے زاویہ ےَ ے ژ انتہا میں معدوم ہو جاتا ہے اور ے پر
دونوں طریقوں کے مماسی خط ایک دوسرے پر منطبق ہو جاتے ہیں اور
دونوں منحنیات کی متناظر عنصری قوسیں نسبت تساوی میں ہوتی ہیں۔



شکل (۱۳۲)

مثال۔ مستقل طول کا خط مستقیم اب اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اسکے
سرے دو ثابت خطوط مستقیم و لا، وما پر رہتے ہیں۔
فوری مرکز ے، و لا، وما پر کے عمودوں کا نقطہ تقاطع ہے جو بالترتیب
نقاط ا اور ب پر کھینچے جائیں۔ نقاط ا اور ب ایک دائرہ پر واقع
ہوتے ہیں جس کا قطر وے ہے اور چونکہ اس دائرہ میں دئے ہوئے طول کا وتر
اب محیط پر ایک مستقل زاویہ او ب بناتا ہے اس کا قطر متعین ہو سکتا ہے
اسلئے ے کا فضائی طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز و ہے۔ نیز چونکہ زاویہ
اے ب مستقل ہے اسلئے ے کا طریق بلحاظ اب کے ایک دائرہ
ہے جس کا قطر وے کی مستقل قیمت کے مساوی ہے۔ اس لئے حرکت زیر بحث،

ایک دائرہ کے دوسرے ثابت دائرہ کے اندر جس کا ناپ دو چند ہے لڑھکنے کے معادل ہے۔ ایسی حرکت پر دفعہ ۱۲۴ مثال ۲ میں بحث کی گئی ہے اور یہ دکھایا گیا ہے کہ کوئی نقطہ پ جو بلحاظ اب کے ثابت ہے قطع ناقص پر ترسیم کرتا ہے جو بعض صورتوں میں جبکہ پ لڑھکنے والے دائرہ کے محیط پر واقع ہو ایک خط مستقیم میں بگڑ کر رہ جاتا ہے۔

۱۵۰۔ بردوریوں کی بطور گردونیوں کے دوہری تکوین

مزید مثال کے طور پر ہم یکساں دائری حرکتوں کو جوڑدار متوازی الاضلاع و ق پ قَ کے ذریعہ جس کا دفعہ ۱۲۵ میں حوالہ دیا گیا ہے ترکیب دینے کے حیلی طریقہ کی طرف عود کرتے ہیں۔

تخصیص کی خاطر فرض کرو کہ سلاخوں و ق، و قَ کی زاوی رفتاریں ن، نَ ایک ہی علامت رکھتی ہیں۔

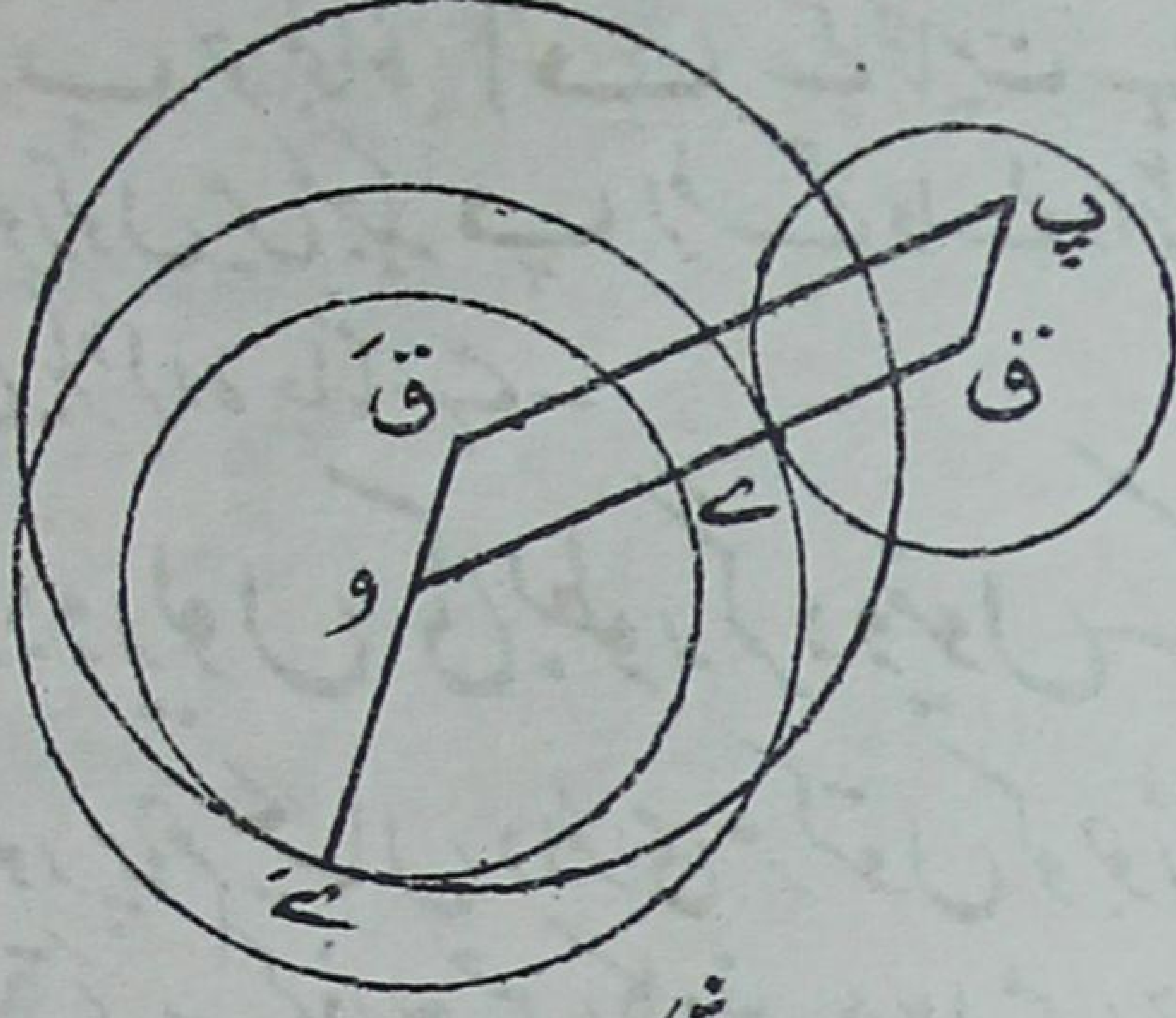
سلاخ قَ پ، کا فوری مرکز (د ہے) ایسا نقطہ، ق و میں ہوگا

نَ × قَ د = ن × و ق .... (۱)

کیونکہ کسی ایسے نقطہ کی رفتار جو قَ پ کے ساتھ استوار طور پر ۲۶۶
لگا ہوا ہے مشتمل ہوگی انتقالیت ن × و ق پر جو و ق کے علی القوائم ہے اور ایسے گھماؤ پر جو قَ کے لحاظ سے زاوی رفتار نَ سے عمل میں آتا ہے۔ اس لئے شرط بالا کے ماتحت ایسے نقطہ کی رفتار جو قَ پ کے ساتھ لگا ہوا ہے اور آن زیر بحث میں نقطہ د پر ہے صفر ہوگی۔ اسلئے سلاخ قَ پ کی حرکت کے لئے دو مرکز طرق ہیں جو و اور ق کو مرکز مان کر کھینچے جائیں اور د میں سے گزریں۔

اسی طرح کے استدلال کی بنا پر سلاخ ق پ کا فوری مرکز (دَ ہے) ایسا نقطہ، قَ و میں ہوگا کہ

ن × قَ ے = نَ × وقَ .... (۲)*



شکل (۱۳۳)

پس سلاخ قَ پ کی حرکت کے لئے دو مرکز طریق دائرے ہونگے جنکے مرکز و اور قَ ہونگے اور جو ے میں سے گذرینگے۔

چونکہ نقطہ پ دونوں سلاخوں ق پ اور قَ پ پر واقع ہے ہم دیکھتے ہیں کہ کوئی سیدھا یا راست جزو ریہ بطور پیراستداری کے دو طرح سے مرتسم ہوسکتا ہے۔

اس خاص صورت میں جبکہ قَ پ = قَ ے، (۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے

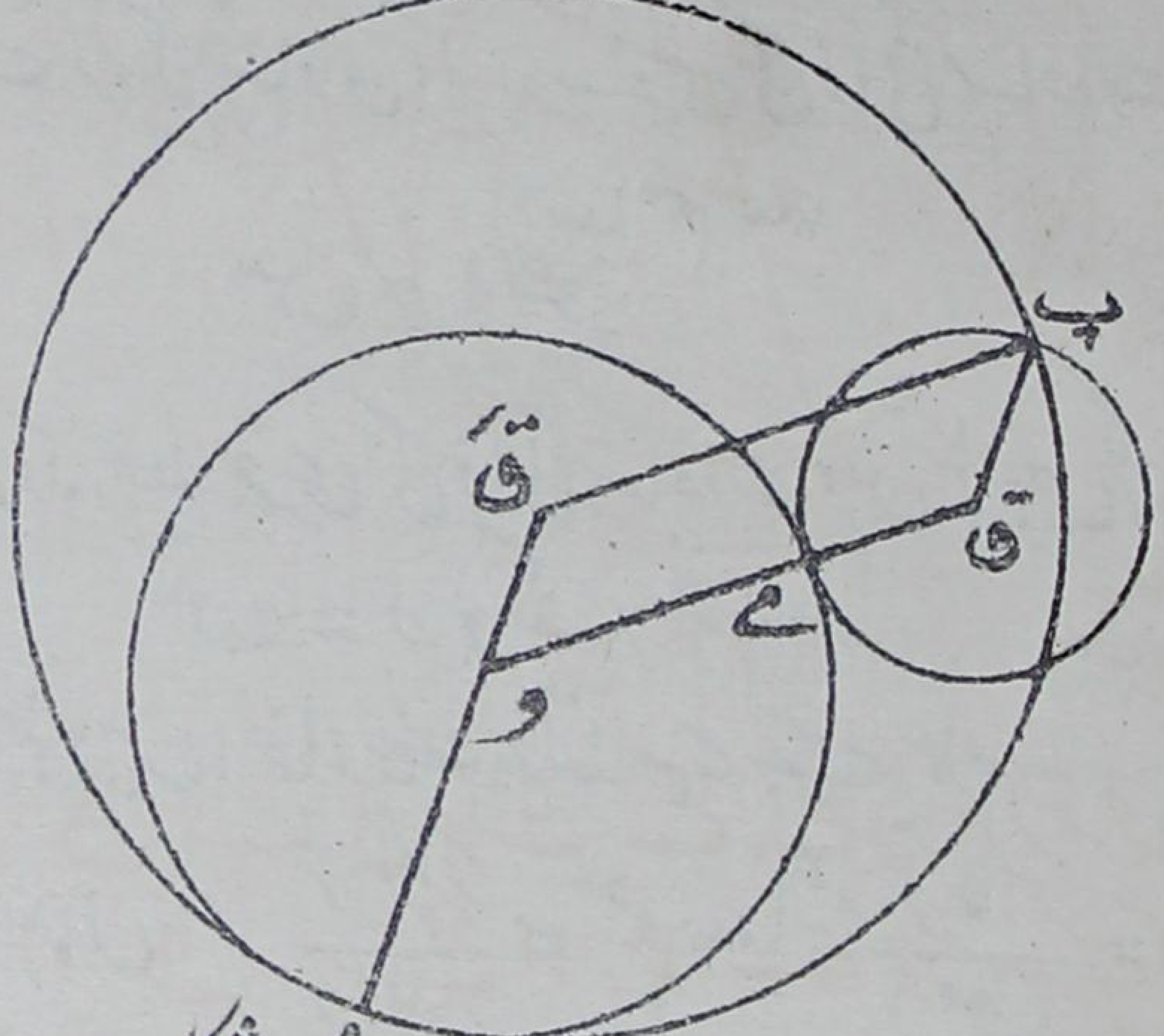
قَ پ : وقَ = قَ ے : وقَ = ن : نَ = وقَ : قَ ے = قَ پ : قَ ے

جس سے قَ پ = وقَ = قَ ے

پ کا راستہ اس صورت میں پرتدویر ہے اور ہم دیکھتے ہیں کہ کسی پرتدویر کی دو طرح سے تکوین ہوسکتی ہے یعنی دو معین دائروں میں سے

* شکل ۱۳۳ ایسی صورت کے لئے کھینچی گئی ہے جبکہ نَ > ن۔ اگر نَ < ن تو ے قَ و محدودہ پر واقع ہوگا اور ے نقاط قَ اور و کے درمیان۔

کسی ایک کو ایک ہی ثابت دائرہ کے باہر لڑھکانے سے* دیکھو شکل ۱۳۴۔ ۳۶۷
مثال کے طور پر خط صنوبری (Cardioid) کی جس کا ذکر دفعہ ۱۲۴ مثال
۱، ۳ میں پہلے آیا ہے، دوہری تکوین دی جاتی ہے۔



شکل (۱۳۴)

جس صورت میں زاوی رفتاروں ن، ن کی علامتیں مختلف ہوں
اسے طالب علم کے معائنہ کے لئے چھوڑا جاتا ہے۔ یہ معلوم ہوگا کہ کسی الٹے
یا رجعی بر دوریہ کی بطور ایک دراستداری خط کے، دو الگ طریقوں سے
تکوین ہو سکتی ہے اور بالخصوص کسی در تدویری کی تکوین دو قابل تعیین دائروں
میں سے کسی ایک کو ایک ہی ثابت دائرہ کے اندر لڑھکانے سے
عمل میں آسکتی ہے۔

امثلہ ۴۶

انحنا

۱- ثابت کرو کہ دائرہ ہی ایک ایسا منحنی ہے جس کا انحنا مستقل ہے۔

* یہ یولر (۱۷۸۱) کا مسئلہ ہے۔

۲- ثابت کرو کہ منحنی کے کسی نقطۂ (لا، ما) پر انحنا کے مرکز کے محدد اس شکل میں رکھے جا سکتے ہیں

$$\text{لا} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرسا}}،\quad \text{ما} + \frac{\text{فرلا}}{\text{فرسا}}$$

۳- ثابت کرو کہ مساوی الزاویہ لولبی کی ذاتی مساوات اس شکل کی ہے

$$\text{س} = \text{ا قو}^{\text{سا مم عہ}}$$

۴- ثابت کرو کہ خط جرّی کی ذاتی مساوات اس شکل میں لکھی جا سکتی ہے

$$\text{س} = \text{ا لوک قم سا}$$

ثابت کرو کہ اس منحنی میں انحنا ایسے بدلتا ہے جیسے عماد۔

۵- ان ضابطوں $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = \text{جم سا}،\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} = \text{جب سا}$ ۳۶۸

کے تفرق سے ثابت کرو کہ $\frac{1}{\text{ر}} = -\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرس}^2} \Big/ \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرس}^2} \Big/ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}$

اور $\frac{1}{\text{ر}^2} = \left(\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرس}^2}\right)^2 + \left(\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرس}^2}\right)^2$ جہاں ر نیم قطر انحنا ہے

۶- اگر ایک منحنی کا ان مساواتوں سے تعین ہو

$$\text{لا} = \text{فا(ت)}،\quad \text{ما} = \text{ف(ت)}$$

تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{\text{ر}} = \frac{\text{لاَ ماً} - \text{ماَ لاً}}{(\text{لاَ}^2 + \text{ماَ}^2)^{\frac{3}{2}}}$ جہاں زبروں سے تفرق بلحاظ ت کے تعبیر ہوتا ہے۔

۷- اوپر کا ضابطہ قطع ناقص لا = ا جم فا، ما = ب جب فا اور قطع زائد لا = ا جمزا ع، ما = ب جبزا ع کی صورت میں لگاؤ۔

۸- ایک منحنی کی کارتیزی مساوات دی ہوئی ہے، بتاؤ کہ اسکے کسی نقطہ کے محدد (لا، ما) کس طرح اس کے میلان (سا) کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں

اور ثابت کرو کہ

$$\text{ر} = \sqrt{\left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر سا}}\right)^{2} + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر سا}}\right)^{2}}$$

۹- جس منحنی کی ذاتی مساوات $\text{س} = \text{م جب سا}$ ہے ثابت کرو کہ وہ خط تدویر ہے (دفعہ ۱۲۰ (۳) کا طریقہ استعمال کرو)

۱۰- "مساوی مضبوطی کے زنجیرہ" کی صورت میں معلوم ہے

$$\text{ر} = \text{م قط سا} \quad (\text{م مستقل})$$

جہاں سا مماس کا میلان ہے افق کے ساتھ، ثابت کرو کہ اگر مبدأ سب سے نچلے نقطہ پر ہو تو $\text{لا} = \text{م سا}$، $\text{ما} = \text{م لوک قط سا}$ جہاں محور لا اور ما بالترتیب افقی اور انتصابی ہیں۔

۱۱- ایک منحنی کی ذاتی مساوات دی گئی ہے $\text{س} = \text{م جب}^{2}\text{سا}$ (م مستقل)، اسکی کارٹیزی مساوات حاصل کرو

$$\text{لا}^{\frac{2}{3}} + \text{ما}^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\,\text{م}\right)^{\frac{2}{3}}$$

۱۲- اگر $\text{ر} = \frac{\text{لا}^{2}}{\text{ما}}$ تو ثابت کرو کہ $\text{ما}^{2} = \text{م} - 2\,\text{لا}^{2}\,\text{جم سا}$

۳۶۹ ۱۳- وہ منحنی دریافت کرو جسکی ذاتی مساوات ہے $\text{س} = \text{ا قط}^{2}\text{سا}$ $\left[\text{ا ما}^{2} = \frac{4}{9}\,\text{لا}^{3}\right]$

۱۴- اگر منحنی پر کے کسی نقطہ کے محدد لا، ما متغیر ت کے دئے ہوئے تفاعل ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} = \frac{\text{فر}^{2}\text{س}}{\text{فرت}^{2}}\,\text{جم سا} - \frac{1}{\text{ر}}\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\right)^{2}\text{جب سا}،$$

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرت}^{2}} = \frac{\text{فر}^{2}\text{س}}{\text{فرت}^{2}}\,\text{جب سا} + \frac{1}{\text{ر}}\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\right)^{2}\text{جم سا}$$

ان نتائج کی حرکیاتی تعبیر بیان کرو۔ اسلئے ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{ر^2} = \left\{ \left(\frac{فر^2 لا}{فرت^2}\right)^2 \times \left(\frac{فر^2 ما}{فرت^2}\right)^2 - \frac{فر^2 س}{فرت^2} \right\} \div \left(\frac{فرس}{فرت}\right)^4$$

۱۵- ستارہ نما $لا = ا\,جم^3 طہ$، $ما = ا\,جب^3 طہ$ میں ثابت کرو کہ $سا = -۳ طہ$ اور اس سے ثابت کرو کہ $ر = ۳\,ا\,جب\,طہ\,جم\,طہ$

۱۶- اگر $لا = ا\,ت^2$، $ما = ۲\,ا\,ت$ تو مرکز انحنا کے محدد ہیں

$ا(۲ + ۳ت^2)$، $-۲\,ا\,ت^3$

۱۷- دفعہ ۱۳۵ (۲) کے کارٹیزی ضابطہ سے ثابت کرو کہ قائم قطع زائد

$لا\,ما = م^2$ میں $ر = \frac{(لا^2 + ما^2)^{\frac{3}{2}}}{۲م^2}$

۱۸- نیز قطع ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ میں $ر = \frac{(ا^2 - ز^2 لا^2)^{\frac{3}{2}}}{ا\,ب}$

۱۹- نیز قطع زائد $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ میں $ر = \frac{(ز^2 لا^2 - ا^2)^{\frac{3}{2}}}{ا\,ب}$

۲۰- نیز قطع مکافی $ما^2 = ۴\,ا\,لا$ میں $ر = \frac{۲(ا + لا)^{\frac{3}{2}}}{ا^{\frac{1}{2}}}$

۲۱- نیز نیم کعبی مکافی $ا\,ما^2 = لا^3$ میں $ر = \frac{لا^{\frac{1}{2}}(۹لا + ۴ا)^{\frac{3}{2}}}{۶ا}$ ۳۷۰

۲۲- نیز کعبی مکافی $ا^2 ما = لا^3$ میں $ر = \frac{ا^2}{۶\,لا}\left(۱ + ۹\frac{لا^4}{ا^4}\right)^{\frac{3}{2}}$

۲۳- نیز ستارہ نما $لا^{\frac{2}{3}} + ما^{\frac{2}{3}} = ا^{\frac{2}{3}}$ میں $ر = -۳(ا\,لا\,ما)^{\frac{1}{3}}$

۲۴- ایک منحنی کے متغیر نقطہ (لا، ما) کے فاصلہ کا مربع ثابت نقطہ (ضا، عا) سے اس جملہ $(لا - ضا)^2 + (ما - عا)^2$، سے تعبیر ہوتا ہے، اس جملہ کو تفرق کرنے سے ثابت کرو کہ جب یہ فاصلہ اقل ہو تو نقطہ (لا، ما) کو لازماً اس عماد کے پایہ پر واقع ہونا چاہئے جو (ضا، عا) سے اس منحنی تک کھینچ سکتا ہے۔

نیز یہ فاصلہ اقل ہوگا اگر نقطہ (ضا، عا) مرکز انحنا کی بہ نسبت منحنی سے زیادہ قریب ہو اور اعظم ہوگا اگر یہ نقطہ مرکز انحنا کی بہ نسبت منحنی سے زیادہ بعید ہو۔

۲۵- اگر منحنی کو ابدال $\text{لاَ} = \text{عہ لا}$، $\text{اَ} = \text{بہ ا}$ سے تحویل کیا جائے تو کسی نقطہ پر کا انحنا اِس نسبت سے بدل جاتا ہے $\frac{\text{عہ بہ}}{(\text{عہ}^2\,\text{جم}^2\,\text{سا} + \text{بہ}^2\,\text{جب}^2\,\text{سا})^{\frac{3}{2}}}$ جہاں سا ہے محور لا کے ساتھ اصلی منحنی کا میلان۔

۲۶- ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}} = \frac{۳\,\text{ع}\,\text{ق}^2 - (۱ + \text{ع}^2)\,\text{ر}}{\text{ق}^2}$$

جہاں $\text{ع} = \frac{\text{فر ا}}{\text{فر لا}}$، $\text{ق} = \frac{\text{فر}^2\,\text{ا}}{\text{فر لا}^2}$، $\text{ر} = \frac{\text{فر}^3\,\text{ا}}{\text{فر لا}^3}$

۲۷- قطع ناقص کے کسی نقطہ پر انحنا $\frac{\text{ا جم}\frac{\text{فہ}}{۲}}{\text{ر رَ}}$ ہے جہاں ر، رَ ماسکی فاصلے ہیں اور فہ ان کا درمیانی زاویہ ہے۔

۲۸- قائم قطع زائد $\text{ر}^2\,\text{جم}\,۲\,\text{طہ} = \text{ا}^2$ میں $\text{س} = \frac{\text{ر}^3}{\text{ا}^2}$

۲۹- چشمہ منحنی

$$\text{ر}^2 = \text{ا}^2\,\text{جم}\,۲\,\text{طہ} \quad \text{میں} \quad \text{س} = \frac{\text{ا}^2}{۳\,\text{ر}}$$

۳۷۱ ۳۰- منحنی $\text{ر}^{\text{م}} = \text{ا}^{\text{م}}\,\text{جم م طہ}$ میں $\text{س} = \frac{\text{ر}^2}{(\text{م}+۱)\,\text{ع}} = \frac{\text{ا}^{\text{م}}}{(\text{م}+۱)\,\text{ر}^{\text{م}-۱}}$

۳۱- ضابطہ $\text{س} = \frac{\text{ر فر ر}}{\text{فر ع}}$ لگانے سے برتدویرہ کے کسی نقطہ پر کا نیم قطر انحنا دریافت کرو۔ (دیکھو مثال ۲۶ صفحہ ۴۳۹)

دائرہ کے دریچہ کی صورت کا معائنہ کرو۔

۳۲- اگر منحنی کی مساوات اِس شکل $\text{ر} = \text{ف}\,(\text{ع})$ میں دی ہوئی ہو تو قطب سے

گذرنے والا وتر انحنا ہوگا $۲\,\text{ع}\,\dfrac{\text{فر ر}}{\text{فر ع}}$

ثابت کرو کہ خط صنوبری کے قطب میں سے گذرنیوالا وتر انحنا سمتی نیم قطر کا $۱\tfrac{۱}{۳}$ گنا ہوتا ہے۔

۳۳۔ ثابت کرو کہ قطب میں سے گذرنے والا منحنی $\text{ر}^{\text{م}} = \text{ا}^{\text{م}}\,\text{جم م طہ}$ کے کسی نقطہ پر کا وتر انحنا $\dfrac{۲\,\text{ر}}{\text{م}+۱}$ ہے۔

۳۴۔ ثابت کرو کہ منحنی ر = ف (ع) کے پائین منحنی کا انحنا بلحاظ مبدأ کے $\dfrac{۲}{\text{ر}} - \dfrac{\text{ع}}{\text{ر}^{۳}\,\text{س}}$ ہے جہاں ر، ع، س اصلی منحنی سے متعلق ہیں۔

۳۵۔ ایک قطع ناقص کے نیم محور ا، ب ہیں، ثابت کرو کہ بلحاظ مرکز کے اسکے پائین منحنی کا انحنا $\dfrac{۳}{\text{ر}} - \dfrac{\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲}}{\text{ر}^{۳}}$ ہے جہاں ر قطع ناقص کے متناظر نقطہ کا سمتی نیم قطر ہے۔

۳۶۔ ذیل کے ضابطہ کو ثابت کرو۔

$$\frac{۱}{\text{س}} = \left\{\frac{۱}{\text{ر}} - \frac{۱}{\text{ر}}\left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}}\right)^{۲} - \frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ر}}{\text{فر س}^{۲}}\right\} \div \left\{۱ - \left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}}\right)^{۲}\right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

اور مثال ۲۴ کے نتائج حاصل کرنے میں اسے لگاؤ۔

۳۷۔ ثابت کرو کہ قطبی محددوں میں اچل مماس کے لئے شرط ہے

$$\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ع}}{\text{فر طہ}^{۲}} + \text{ع} = ۰ \quad \text{جہاں} \quad \text{ع} = \frac{۱}{\text{ر}}$$

۳۸۔ اس ضابطہ $\text{سا} = \text{طہ} + \text{فہ} = \text{طہ} + \text{مم}^{-۱}\,\dfrac{۱}{\text{ر}}\,\dfrac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}}$ سے

قطبی محددوں میں انحنا کے لئے یہ ضابطہ حاصل کرو ۳۷۲

$$\frac{۱}{\text{س}} = \left\{\text{ر}^{۲} - \text{ر}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ر}}{\text{فر طہ}^{۲}} + ۲\left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}}\right)^{۲}\right\} \div \left\{\text{ر}^{۲} + \left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}}\right)^{۲}\right\}^{\frac{۳}{۲}}$$

$$= \left(\frac{\text{فر}^2\text{ع}}{\text{فرطہ}^2} + \text{ع}\right) \div \left\{1 + \left(\frac{1}{\text{ع}}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرطہ}}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}} \quad \text{جہاں} \quad \text{ع} = \frac{1}{\text{ر}}$$

۳۹- اس ترقیم کے موافق، ثابت کرو کہ مبدأ میں سے گذرنیوالا وتر انحنا ہے

$$3\left\{1 + \left(\frac{1}{\text{ع}}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرطہ}}\right)^2\right\} \div \left(\frac{\text{فر}^2\text{ع}}{\text{فرطہ}^2} + \text{ع}\right)$$

امثلہ ۷۴

نیوٹن کا طریقہ

۱- منحنی ر ما² = (لا - عہ) (لا - بہ)² کا نیم قطر انحنا نقطہ (عہ، ۰) پر ہے

$$\frac{(\text{عہ} - \text{بہ})^2}{2\,\text{ر}}$$

۲- نیوٹن کے طریقہ سے ثابت کرو کہ زنجیرہ ما = ا جمز $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ کے رأس پر نیم قطر انحنا ا کے مساوی ہے۔

۳- نقطہ (- ا، ۰) پر منحنی ما² = ا² (ا + لا) / لا کا نیم قطر انحنا $\frac{\text{ا}}{2}$ ہے۔

۴- ڈاین ما² = ا² (ا - لا) / لا کا نیم قطر اس کے رأس پر $\frac{\text{ا}}{2}$ ہے۔

۵- نقطہ (ا، ۰) پر منحنی ا² ما² = لا³ (ا - لا) کا نیم قطر انحنا دریافت کرو۔

۶- مکافی (لا - ما)² - ۲ ا (لا + ما) + ا² = ۰ کا نیم قطر انحنا اُن نقطوں پر دریافت کرو جہاں پر یہ محوروں کو مس کرتا ہے۔

۷- نقطہ لا = $\frac{\pi}{2}$ پر منحنی ما = ۴ جب لا - جب ۲ لا کا نیم قطر انحنا دریافت کرو۔ [۲٫۷۹۵ . . . .]

۸- مکافی ما = م لا + $\frac{\text{لا}^2}{\text{ر}}$ میں، مبدأ پر، محور ما کے متوازی وتر انحنا ۳۷۲

کا طول (۱ + م²) ر ہے اور دائرہ انحنا کی مساوات ہے

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = (1 + \text{م}^2)\,\text{ر}\,(\text{ما} - \text{م لا})$$

۹- منحنی ما = م لا + ن (لا - ر)² (لا - ب)² کا انحنا نقاط (ر، ۰)، (ب، ۰) پر

دریافت کرو۔

[(۱ + م^۲)^{۳/۲} / ۲ ن (ا – ب)^۲]

۱۰– مبداء پر مخروطی ما = الا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ کے دائرہ انحنا کی مساوات معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ منحنی سے دوبارہ خط مستقیم (ا – ب) ما = ۲ ھ لا پر ملتا ہے۔

۱۱– اگر ایک منحنی کی قطبی مساوات ر = فہ (طہ) ہو جہاں فہ (طہ) طہ کا جفت تفاعل ہے تو نقطہ طہ = ۰ پر انحنا ہے

فہ (۰) – فہ'' (۰) / [فہ (۰)]^۲

۱۲– زیادہ سے زیادہ کشش کے مجسم (دیکھو مثال ۱۹ صفحہ ۴۴۹) کے نصف النہاری منحنی میں ثابت کرو کہ محور کے سروں پر نیم قطر انحنا بالترتیب ∞ اور ۲/۳ ا ہیں۔

۱۳– چشمہ منحنی ر^۲ = ا^۲ جم ۲ طہ کے کسی ایک سرے پر نیم قطر انحنا ا/۲ ہے۔

۱۴– استداری خط لا = ا طہ + ک جب طہ، ما = ا – ک جم طہ کے نیم قطر انحنا ان نقطوں پر جہاں یہ قاعدہ سے نزدیک ترین اور بعید ترین ہے (ا ± ک)^۲ / ک ہیں۔

۱۵– نیوٹن کے طریقہ سے ثابت کرو کہ بردوریہ

لا = ا۱ جم ن۱ ت + ا۲ جم ن۲ ت، ما = ا۱ جب ن۱ ت + ا۲ جب ن۲ ت

کے انحنا کے نیم قطر اُن نقاط پر جو مرکز سے قریب ترین اور بعید ترین ہیں یہ ہیں

(ن۱ ا۱ ± ن۲ ا۲)^۲ / (ن۱^۲ ا۱ ± ن۲^۲ ا۲)

یہ شرط مستنبط کرو کہ مرکز سے قریب ترین نقاط پر بردوریہ کو مرکز کی جانب مقعر ہونا چاہئے (جیسے چاند کا مدار بلحاظ سورج کے)۔

۱۶– لبساژوکے منحنی لا = ا جم ن ت، ما = ا جب ن ت کے نقطہ ۳۷۴

ت = ۰ پر انحنا کا نیم قطر دریافت کرو۔

اِس منحنی کا خاکہ کھینچو۔ [۳ب۲ / ۸]

۱۷۔ اگر ایک منحنی کی مساوات قطبی محددوں (ر، طہ) میں ہو اور قطب منحنی پر واقع ہو اور ابتدائی خط قطب پر کا مماس ہو تو ثابت کرو کہ قطب پر انحنا کا قطر = نہا ر/طہ

منحنی ر = ا جم م طہ کے قطب پر انحنا کا نیم قطر دریافت کرو۔

۱۸۔ اگر ایک منحنی پر نقطہ پ ایسا ہو کہ اِس پر کا انحنا غیر مسلسل ہو لیکن مماس کی سمت غیر مسلسل نہ ہو اور پ کی مقابل جانبوں میں پاس کے نقطے ق، ل ہوں تو ثابت کرو کہ دائرہ پ ق ل کا انحنا آخرالامر ہوگا م۱/ر۱ + م۲/ر۲ جہاں ر۱، ر۲ دئے ہوئے منحنی کے انحنا کے نیم قطر ہیں پ کے دونوں جانب اور م۱، م۲ نسبتوں (پ ق / ق ل) اور (پ ل / ق ل) کی انتہائی قیمتیں ہیں۔

۱۹۔ حادہ زاویہ جو ایک منحنی کا ایک وتر پ ق، پ پر کے مماس کے ساتھ بناتا ہے جبکہ ق کو پ کے لاانتہا قریب لیا جاتا ہے آخرالامر ۱/۲ (مف س / ر) کے مساوی ہے جہاں مف س قوس پ ق ہے اور ر نیم قطر انحنا ہے پ پر۔

۲۰۔ اگر ایک لاانتہا چھوٹی قوس پ ق کے سروں پر کے مماس م پر ملیں تو آخرالامر م پ اور م ق نسبت تساوی میں ہونگے۔

یہ کیوں حاصل نہیں ہوتا کہ م کو پ ق کے وسطی نقطہ کے ساتھ ملانیوالا خط آخرالامر پ ق پر عمود وار ہوگا۔

۲۱۔ یہ تسلیم کرکے کہ مثلث ا ب ج کے بیرونی دائرہ کا نیم قطر (۱/۲ ا / جب ا) ہے ثابت کرو کہ مثال ۱۹ سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ لمسی دائرہ انحنا کے دائرہ پر منطبق ہوتا ہے۔

۲۲ - ثابت کرو کہ جب ایک ذرہ پر حاصل قوت حرکت کی سمت میں ہو تو راسنہ کا مماس "اپل" ہوتا ہے۔

امثلہ ۴۸

(لفاف - برپیچ)

۱ - مکافیات ما² = ۴ عہ (لا - عہ) کا لفاف خطوط مستقیم کا ایک جوڑا ہے جہاں عہ متبدل ہے۔

۲ - مکافی ما² = ۴ ا لا کے کسی نقطہ پ سے محددوں کے محوروں پر عمود پ م، پ ن نکالے گئے ہیں، م ن کا لفاف دریافت کرو۔
[ما² = - ۱۶ ا لا]

۲۷۵ ۳ - خط لا جم عہ + ما جب عہ = وقظ عہ کا لفاف دریافت کرو اور نتیجہ کا ہندسی مفہوم بیان کرو۔

۴ - مکافیوں ا ما² = عہ² (لا - عہ) کا لفاف جہاں عہ متبدل ہے یہ منحنی ہے ا ما² = ۴/۲۷ لا³

۵ - ایک منحنی کے سمتی نیم قطروں کو قطر مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں، ہندسی طریق پر ثابت کرو کہ انکا لفاف دئے ہوئے منحنی کا پائین خط ہے بلحاظ مبدا کے۔

۶ - مخروطی تراش کے ماسکی وتروں کو قطر مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں، ان کا لفاف معلوم کرو۔

۷ - ایک دائرہ کے محیط پر کے ثابت نقطہ میں سے وتر کھینچے گئے ہیں، اِن وتروں کو قطر مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ دائروں کا لفاف خط صنوبری ہے۔

۸ - قائم قطع زائد کے مرکزی نیم قطروں کو قطر مان کر دائرے بنائے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کا لفاف برنولی کا چشمہ منحنی ہے۔

۹ - ثابت کرو کہ منحنیات پ جم عہ + ق جب عہ = ط کا لفاف جہاں پ، ق، ط متغیروں لا، ما کے دئے ہوئے تفاعل ہیں اور عہ متبدل ہے

$\text{پ}^2 + \text{ق}^2 = \text{ط}^2$ ہے۔

۱۰۔ دائروں $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - 2\text{ا}\,\text{لا}\,\text{جم}\,\text{عہ} - 2\text{ا}\,\text{ما}\,\text{جب}\,\text{عہ} = \text{ج}^2$ کا لفاف دریافت کرو اور نتیجہ کی تعبیر بیان کرو۔

۱۱۔ ع اور عہ کے درمیان رشتہ معلوم کرو کہ خط مستقیم $\text{لا}\,\text{جم}\,\text{عہ} + \text{ما}\,\text{جب}\,\text{عہ} = \text{ع}$ دائروں $(\text{لا} - \text{ا})^2 + \text{ما}^2 = \text{ب}^2$ اور $(\text{لا} + \text{عہ})^2 + \text{ما}^2 = \text{ج}^2$ سے مساوی طول کے وتر کاٹے۔ ثابت کرو کہ اس شرط کے ماتحت خط کا لفاف قطع مکافی ہے۔

۱۲۔ مستقل رقبہ کے ناقصوں کا ایک نظام ہے جن کا مرکز وہی ہے اور جنکے محور سمت میں ایکدوسرے پر منطبق ہیں، ثابت کرو کہ لفاف دو مزدوج قائم زائدوں پر مشتمل ہے۔

۱۳۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ثابت نقطوں $(\pm\text{ج}, 0)$ سے اس پر کے عمودوں کا حاصل ضرب مستقل $(= \text{ب}^2)$ ہے، ثابت کرو کہ لفاف ناقص ہے $\dfrac{\text{لا}^2}{\text{ب}^2 + \text{ج}^2} + \dfrac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ اگر عمود متحرک خط کے ایک ہی جانب ہوں یا زائد ہے $\dfrac{\text{لا}^2}{\text{ج}^2 - \text{ب}^2} - \dfrac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ اگر عمود خط کی متقابل جانبوں میں ہوں۔ ۳۰۶

۱۴۔ قطع مکافی $\text{ما}^2 = 4\text{ا}\,\text{لا}$ کے دوہرے معینوں کو قطر مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ ان کا لفاف $\text{ما}^2 = 4\text{ا}(\text{لا} + \text{ا})$ ہے۔

۱۵۔ قطع ناقص $\dfrac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \dfrac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے دوہرے معینوں کو قطر مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ لفاف ناقص $\dfrac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2} + \dfrac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ ہے۔

۱۶۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ثابت نقطوں $(\pm\text{ج}, 0)$ سے خط پر کے عمودوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل $(= 2\text{م}^2)$ ہے ثابت کرو کہ لفاف

مخروطی تراش $\frac{\text{لا}^2}{\text{م}^2 - \text{ج}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{م}^2} = ۱$ ہے، مختلف صورتوں کا معائنہ کرو۔

۱۷۔ ایک خطِ مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت نقطوں سے اس پر کے عمودوں کے مربعوں کا فرق مستقل ہے، ثابت کرو کہ لفاف قطع ناقص ہے۔

۱۸۔ ان ناقصوں $\text{لا} = \text{اجب}\,(\text{طہ} - \text{عہ})$، $\text{ما} = \text{ب جم طہ}$ کا لفاف معلوم کرو جہاں عہ متبدل ہے۔

۱۹۔ متبدل ج کے لئے جو زنجیرے $\text{ما} = \text{ج جمز}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ج}}\right)$ سے تعبیر ہوتے ہیں ان کا لفاف دو خطوطِ مستقیم پر مشتمل ہے۔

۲۰۔ ان ناقصوں $\frac{\text{لا}^2}{\text{عہ}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{بہ}^2} = ۱$ کا لفاف جہاں $\text{عہ} + \text{بہ} = \text{م}$ (مستقل) ستارہ نما $\text{لا}^{\frac{2}{3}} + \text{ما}^{\frac{2}{3}} = \text{م}^{\frac{2}{3}}$ ہے۔

۲۱۔ خطِ مستقیم کا لفاف جو محددوں کے محوروں پر ایسے مقطوعے کاٹتا ہے جن کا مجموعہ م ہے، قطع مکافی $\sqrt{\text{لا}} + \sqrt{\text{ما}} = \sqrt{\text{م}}$ ہے۔

۲۲۔ دو نقطے محددوں کے محوروں پر مختلف، مستقل رفتاروں سے حرکت ۳۷۷
کرتے ہیں، ثابت کرو کہ ان کو ملانے والا خط ایک قطع مکافی کو مس کرتا ہے۔

۲۳۔ قطع ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کے کسی نقطہ سے محددوں کے محوروں پر عمود کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان عمودوں کے قدموں کو ملانیوالے خطِ مستقیم کا لفاف $\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right)^{\frac{2}{3}} = ۱$ ہے۔

۲۴۔ منحنیات $\text{عہ}\,\text{ما}^2 = \text{لا}\,(\text{لا} + \text{عہ})^2$ کے انتہائی نقاط تقاطع کا طریق دریافت کرو جہاں عہ متبدل ہے۔ اور جو نتیجہ حاصل ہوا اسکا معائنہ کرو۔

۲۵۔ مستقل نیم قطر کے ایک دائرہ کا مرکز ہمیشہ ایک دئے ہوئے منحنی پر واقع

ہوتا ہے ثابت کرو کہ دائرہ کا لفاف دو متوازی منحنی ہیں۔

۲۶- دئے ہوئے نیم قطر کا ایک دائرہ، ایک دئے ہوئے منحنی کو مس کرتا ہے، ثابت کرو کہ دائرہ کا لفاف دو متوازی منحنیات پر مشتمل ہے۔

۲۷- اگر ایک منحنی کی مساوات اس شکل لا^2 = ف (ع) میں دی ہوئی ہو تو اسکے کسی متوازی منحنی کی مساوات اس شکل لا^2 = ف (ع - ج) + ۲ ج ع - ج^2 میں ہوگی۔

۲۸- ثابت کرو کہ منفی پائیں منحنیات (دفعہ ۱۳۱) کا مسئلہ خط مستقیم لا جم سا + ما جب سا = ع کا لفاف معلوم کرنیکے معادل ہے جہاں ع متبدل سا کا ایک دیا ہوا تفاعل ہے۔

اسکی تصدیق کرو کہ اسی سے دفعہ ۱۳۱ کا ضابطہ (۴) حاصل ہوتا ہے۔

۲۹- ثابت کرو کہ مکافی ما^2 = ۴ ا لا کا منفی پائیں منحنی، بلحاظ راس کے یہ منحنی ہے ا ما^2 = $\frac{1}{27}$ (لا - ۴ ا)^3

۳۰- لفافوں کے طریقہ سے ثابت کرو کہ دائرہ کا منفی پائیں منحنی قطع ناقص ہوگا اگر قطب دائرہ کے اندر ہو اور قطع زائد ہوگا اگر قطب دائرہ کے باہر ہو

۳۱- ہندسی طریق پر ثابت کرو کہ مساوی الزاویہ لولبی کے کسی نقطہ پر انحنا کے نیم قطر کے سامنے قطب پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

۳۲- مساوی الزاویہ لولبی کا برچیہ اسی زاویہ کا مساوی الزاویہ لولبی ہوتا ہے۔

۳۳- قطع ناقص لا^2/ا^2 + ما^2/ب^2 = ۱ کے برچیہ سے گھرا ہوا رقبہ ۳ ط (ا^2 - ب^2)^2 / ۸ ا ب ہے۔

۳۴- منحنی ا ما^2 = لا^3 کے کسی نقطہ پر کے مرکز انحنا کے محددات ہیں

ضا = - لا - $\frac{9}{2}$ · لا^2/ا ، عا = ۴ ما + $\frac{4}{3}$ · ا ما/لا

ثابت کرو کہ مبدأ کے نزدیک برچیہ کی شکل مکافی ما^2 = - $\frac{16}{9}$ ا لا کی ہے۔

۳۵- ثابت کرو کہ اگر ایک منحنی نقطہ انعطاف رکھتا ہو تو اس کا برچیہ

ایک متقارب رکھتا ہے۔

ثابت کرو کہ منحنی ۲ د ما = لا^۳ کے برپیچ کا وہ حصہ جو منحنی کے اس حصہ کے جواب میں ہے جو مبدا کی پڑوس میں ہے تقریباً قطع زائد لا ما = ۱/۱۲ ا^۲ سے تعبیر ہو سکتا ہے۔

۳۶۔ قطع زائد لا = ا جمز ۶، ما = ب جبز ۶ کا برپیچ

(ا لا)^{۲/۳} - (ب ما)^{۲/۳} = (ا^۲ + ب^۲)^{۲/۳} ہے۔

۳۷۔ نقطہ و سے شعاعین نکلکر ایک دئے ہوئے منحنی سے منعکس ہوتی ہیں، ثابت کرو کہ منعکسہ شعاعیں سب کی سب ایسے منحنی پر عماد ہیں جو بلحاظ و کے، معلومہ منحنی کے پائیں منحنی کا متشابہ ہے لیکن دوہرے ابعاد والا ہے۔

۳۸۔ اس لئے ثابت کرو کہ دائرہ پر کے انعکاس سے جو آتشی بنتا ہے وہ گھونگا منحنی کا برپیچہ ہے۔ اور اس خاص صورت میں جبکہ روشن نقطہ دئے ہوئے دائرہ کے محیط پر واقع ہے آتشی خط صنوبری ہے۔

۳۹۔ ثابت کرو کہ کسی منحنی پر انعکاس سے جو آتشی بنتا ہے وہ ایسے دائروں کے نظام کے لفاف کا برپیچہ ہے جو منحنی کے مختلف نقطوں کو مرکز مان کر کھینچے جائیں اور سب کی سب روشن نقطہ میں سے گذریں۔

انعطاف کی صورت میں متناظر مسئلہ کیا ہوگا۔

امثلہ ۴۹ ۳۷۹

(گردوئے وغیرہ)

۱۔ ایک پترا کسی طرح سے بھی اپنے مستوی میں حرکت کرتا ہے، ثابت کرو کہ پترے میں کے متوازی خطوط متوازی منحنیات کو لفت کرتے ہیں۔

۲۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ یہ ہمیشہ ایک ثابت نقطہ و میں سے گذرتا ہے اور اس پر کا ایک نقطہ ق ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہوتا ہے جو و میں سے گذرتا ہے، ثابت کرو کہ فوری مرکز ف میں سے گذرنیوالے

قطر کا دوسرا سرا ہے اور دو مرکز طریق دریافت کرو۔

گھونگا منحنی کے عماد کھینچنے کا عمل دریافت کرو اور اس سے یہ نتیجہ حاصل کرو کہ خط صنوبری میں، قرن میں سے گذرنے والے وتر کے سروں پر کے عماد، اس خط پر علی القوائم کاٹتے ہیں جو اس نقطہ (قرن) میں سے وتر پر عمود ہو۔

۳۔ ایک مستوی شکل اس طرح حرکت کرتی ہے کہ اس میں کے دو خطوط مستقیم دو ثابت دائروں کو مس کرتے ہیں، دو مرکز طریق کو دریافت کرو۔

۴۔ اگر ایک دائرہ اپنے سے نصف ناپ کے ایک ثابت دائرہ پر لڑھکے اور پورا اسکے گرد آجائے تو ہر ایک خط مستقیم جو لڑھکنے والے دائرہ پر سوار ہو ایک دائرہ کو لف کریگا۔

۵۔ اگر ایک مستوی شکل اسطور پر حرکت کرے کہ اس میں کا ایک خط مستقیم ایک ثابت دائرہ پر لڑھکے تو شکل میں کے کسی اور خط مستقیم کا لفاف دائرہ کا ایک دریچیہ ہے۔

۶۔ خط مستقیم $\text{ع}_\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}_\text{ا}\,\text{ما} = \text{ا}$ کے لفاف کا نیم قطر انحنا جہاں $\text{ع}_\text{ا}$، $\text{ب}_\text{ا}$ متبدل ت کے دئے ہوئے تفاعل ہیں $\pm \dfrac{(\text{ع}_\text{ا}^2 + \text{ب}_\text{ا}^2)^{\frac{3}{2}} (\text{عَ}_\text{ا}\,\text{بً}_\text{ا} - \text{عً}_\text{ا}\,\text{بَ}_\text{ا})}{(\text{ع}_\text{ا}\,\text{بَ}_\text{ا} - \text{عَ}_\text{ا}\,\text{ب}_\text{ا})^3}$ ہے جہاں زبریں بلحاظ ت کے تفرقوں کو تعبیر کرتی ہیں۔

۷۔ اگر ایک منحنی جسکی مماس، قطبی مساوات $\text{ل} = \text{ف}(\text{ع})$ ہے ایک ثابت خط مستقیم پر لڑھکے تو قطب کے راستہ کا انحنا ہے۔ $\dfrac{\text{ف}}{\text{فَ ع}}\left(\dfrac{\text{ع}}{\text{ل}}\right)$ جہاں ر نقطہ تماس کا سمتی نیم قطر ہے۔

۸۔ ثابت کرو کہ اگر قطع مکافی ایک ثابت خط مستقیم پر لڑھکے تو ماسکہ کا راستہ زنجیرہ ہے

۹۔ اگر ایک مخروطی تراش ایک ثابت خط مستقیم پر لڑھکے تو کسی ایک ماسکہ کا راستہ ایک منحنی ہے $\dfrac{\text{ا}}{\text{ر}} + \dfrac{\text{ا}}{\text{د}} = \dfrac{\text{ا}}{\text{ج}}$ جہاں ر نیم قطر انحنا ہے، د عماد ہے اور ج مستقل۔

۳۸۰ ۱۰۔ اگر ایک مساوی الزاویہ لولبی ایک ثابت خط مستقیم پر لڑھکے تو قطب کا راستہ ایک خط مستقیم ہوگا۔

۱۱۔ اگر متکافی لولبی $ر = \frac{۱}{ط}$ ایک خط مستقیم پر لڑھکے تو قطب کا راستہ خط جرّی ہوگا۔

۱۲۔ اگر کوٹس کے لولبیوں $\frac{۱}{ع^{۲}} = \frac{۱}{ر^{۲}} + ب$ میں سے کوئی ایک، ایک خط مستقیم پر لڑھکے تو قطب ایک منحنی مرتسم کریگا جس کا انحنا ایسے بدلیگا جیسے عماد۔

۱۳۔ ایک منحنی ایک ثابت خط مستقیم پر لڑھکتا ہے، ثابت کرو کہ اس گردونیہ کی قوس جسے کوئی برداشتہ نقطہ مرتسم کرتا ہے اس منحنی کی متناظر قوس کے مساوی ہے، جو بلحاظ و کے دئے ہوئے منحنی کا پائین منحنی ہے۔ [Steiner]

۱۴۔ بند بیضوی منحنی ایک ثابت خط مستقیم پر لڑھکتا ہے، ثابت کرو کہ وہ متغیر خط جو نقطہ تماس کو اندرونی محمولہ نقطہ و سے ملاتا ہے ایک پوری گردش میں اتنا رقبہ عبور کرتا ہے جو بلحاظ نقطہ و دئے ہوئے منحنی کے پائین منحنی کے رقبہ کا دوچند ہے۔ [Steiner]

۱۵۔ فوری مرکز کے نظریہ سے ثابت کرو کہ جب جوڑدار ڈنڈوں کے مستوی ذوار بعۃ الاضلاع سے گھرا ہوا رقبہ اچل (ساکن) ہو تو ذوار بعۃ الاضلاع ہم محیط ہوگا۔

اصطلاحات صغاری احصا

جلد دوم

Acoustics	علم آواز
Anchor-ring	لنگر چھلا
Annular	حلقہ دار، حلقہ نما
Astroid	ستارہ نما
Asymptotes	متقارب
Auxiliary circle	معاون دائرہ
Bipolar	دو قطبی
Body centrode	جسمی مرکز طریق
Cardioid	خط صنوبری
Carried line	خط برداشتہ
Catenary	زنجیرہ
Caustic	آتشی
Centrode	مرکز خط
Centre of rotation	گھماؤ کا مرکز
Circuit	چکر
Cissoid	لبلابی خط
Comet	شہاب
Commensurable	متوافق
Cone	مخروط
Conic	مخروطی
Contour line	ہم ارتفاعی خط
Convergence	استدقاق
Crank	کرینک
Critical case	فاصل صورت
Crossed parallelogram	متقاطع متوازی الاضلاع
Cusp	قرن

ہم محیط چار ضلعی	Cyclic Quadrilateral	Impulse	دھکہ
خط تدویر	Cycloid	Indefinite Integral	نا محدود تکملہ
محدود تکملہ	Definite integral	Indicator diagram	نمایندہ تصویر
مرتب	Directrix	Index	نمایندہ ، اشاریہ
خروج المرکز	Eccentricity	Instantaneous centre	فوری مرکز
طریق الشمس	Ecliptic	Integral	تکملہ
ناقص نما	Ellipsoid	Integration	تکمل
ناقصی تکملہ	Elliptic Integral	Integration by parts	تکمل بالحصص
ناقصیت	Ellipticity	Intercept	مابینی حصہ
لفاف	Envelope	Interpolation	بینی ادراج
بردوریہ	Epicyclic	Interval	وقفہ
برتدویر	Epicycloid	Intrinsic equation	ذاتی مساوات
براستداری	Epitrochoid	Inverse	معقلوب
ہم قوہ	Equipotential	Inversion	تقلیب
برپیچہ	Evolute	Involute	درپیچہ
خم	Flexure	Irrational	غیر ناطق
ماسکہ	Focus	Lamina	پترا
ناقص، ناتکمل، مقطوعہ	Frustum	Latus-rectum	وتر خاص
ارضیات	Geodesy	Lemniscate	چشمہ منحنی
موسیقی	Harmonic	Limacon	گھونگا منحنی
زائد نما	Hyperboloid		
درتدویر	Hypocycloid		
برتدویر	Hypotrochoid		

Line-roulette	خط گردونیہ
Linkage	رابطہ
Link-work	رابطہ کاری
Loop	حلقہ
Magnetic curves	مقناطیسی منحنی
Mechanical	حیلی
Modulus	مقیاس
Multiple Integral	ضعفی تکملہ
Node	عقدہ
Optical	مناظری
Optics	علم مناظر
Orientation	تشریق
Oscillating cylinder	اہتزازی اسطوانہ
Osculating circle	لثمی دائرہ
Oval	بیضسہ
Paraboloid	مکافی نما
Parameter	متبدل
Partial	جزوی
Pericycloid	گرد تدویر
Period	دور
Phase	ہیئت
Piston	فشارہ
Pivot	چول
Planimeter	سطح پیما

Point-roulette	نقطہ گردونیہ
Polar	قطبی
Pole	قطب
Prolate Ellipsoid	لمبوترا ناقص نما
Prolate spheroid	لمبوترا کرہ نما
Pyramid	مخروط مضلع
Quadrature	تربیع
Range	ٹپہ
Rational	منطق
Reciprocal	تکافی
Rectification	تخطیط
Reduction	تحویل
Reflection	انعکاس
Refraction	انعطاف
Refractive Index	انعطاف نما
Retrograde	رجعی
Rolling curves	لڑھکنے منحنی، غلطان منحنی
Roulette	گردونیہ
Screw-thread	پیچ تاگا
Semi-cubical parabola	نیم کعبی مکافی
Space centrode	فضائی مرکز طریق
Space Integral	مکانی تکملہ
Spandril	کمان شانہ

Spheroid	کرہ نما
Spiral	لولبی
Stationary	اچل، مقیم
Steam Engine	بھاپ انجن
Surface of revolution	گردشی سطح
Tension	تناؤ
Tidal clock	موج گھڑی
Time integral	زمانی تکملہ
Tractrix	خط جرّی
Trajectory	خط رمی
Transcendental	ماورائی
Trapezium	منحرف
Trochoid	استداری خط
Undulation	موج
Vector	سمتی
Witch of Agnesi	اگنیسی کی ڈاین

اشاریہ

اعداد صفحوں کے لحاظ سے

اپیل مماس، ۴۵۷
اپیل نقطہ، ۴۵۷
ارشمیدس کا لولب، ۴۱۲
استداری خط، ۴۰۵
استدقاق، محدود تکملہ کا، ۲۸۳
انتقالیت (ہٹاو)، ستوی شکل کی ۴۸۸، ۵۰۱
انحنا، ۴۵۴، ۴۶۴، ۴۶۸
اوسط قیمت کا مسئلہ ۲۸۸
اوسط قیمتیں، ۳۵۷
اوسط مرکز، ہندسی اشکال کا، ۳۶۰
امسلر کا سطح پیما، ۳۲۹
براستداری، ۴۱۰
بر بیچہ، ۴۷۸، ۴۸۳
برتدویر، ۴۰۷، ۴۵۹، ۴۸۲، ۴۹۵، ۴۹۹، ۵۰۱، ۵۰۴،
بردورے، ۴۱۶، ۵۰۳
برنولی کا چشمہ منحنی، ۴۲۵، ۴۲۹

پاپس منحنی، ۴۳۲
پوسیلیئے کا رابطہ، ۴۳۰
پینیس کے مسئلے، ۳۶۴
تبدیلی، متغیر کی، ۲۹۸، ۲۳۵
تحویل، ضابطے ۲۴۴، ۲۴۶، ۲۹۸
تربیع، تقریبی، ۳۵۳
تفرق، محدود تکملہ کا، ۲۸۹
تقریبی تکمل، ۳۵۳
تقلیب، ۴۲۹، ۴۳۰
تکمل، ۲۲۱
بالخصوص، ۲۴۱
ابدال سے، ۲۳۵، ۲۳۸، ۲۴۰
غیر منطق تفاعلوں کا، ۲۳۲، ۲۵۷
منطق کسروں کا، ۲۲۸، ۲۴۸، ۲۵۱، ۲۵۳
تثلثی تفاعلوں کا، ۲۳۸، ۲۹۸
تکملے، محدود، ۲۸۰، ۲۸۲، ۲۸۷، ۲۸۹، ۲۹۱، ۳۰۲
تقریبی قیمت، ۳۵۳
ضعفی، ۳۶۸
چار سطحی، اسکا حجم، ۳۳۵
چشمہ منحنی، برنولی کا، ۴۲۵، ۴۲۹
چلیپی متوازی الاضلاع، ۴۳۲
حجم، مجسموں کے، ۳۳۲، ۳۳۴، ۳۳۶، ۳۶۹
خط تدویریہ، ۴۰۳، ۴۵۸، ۴۸۱، ۴۸۶، ۴۹۵، ۴۹۹، ۵۰۱
خط جبری، ۳۹۹
خط گردونیہ، ۴۹۹

دائرہ کا دریچہ، ۴۱۱، ۴۸۷
دراستداری، ۴۱۰
دریچے، ۴۸۶
درندویر، ۴۰۷، ۴۰۸
دو قطبی محدد، ۳۳۷
ذاتی مساوات، منحنی کی، ۴۵۸
رقبہ، ۲۰۱، ۳۱۷
اس کی علامت، ۳۲۱
جو ایک متحرک خط عبور کرے، ۳۲۷
رقبے، مستوی منحنیوں کے، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۲۴
اسکی آلی پیمائش، ۳۲۹
زائد، ۳۱۹، ۴۲۸، ۴۲۹
زنجیرہ، ۳۴۳، ۳۹۷، ۴۵۸، ۴۶۳
ستارہ نما، ۴۱۶، ۴۹۳
سطح پیما، ۳۲۹
سمپسن کے قاعدے، ۳۴۱، ۳۵۶
صنوبری (خط)، ۴۱۳
ضعفی تکملے، ۳۶۸
عقدہ، ۳۹۰
عقدوں کا طریق، ۴۷۸
علامت رقبہ کی، ۳۲۱
فوری مرکز، ۴۸۸، ۴۹۴، ۵۰۱
قرنون کا دائرہ، ۵۰۱
قطبی، متکافی، ۴۳۲
قوس (منحنی کی)، ضابطے، ۳۴۳، ۳۴۷، ۳۴۸،

قیمت، ۳۵۷، ۳۶۱
کارٹیزی بیضہ، ۴۳۹
کرہ، اس کی سطح، ۳۵۱
اس کا حجم، ۳۳۶
کروی قطعہ، اس کا حجم، ۳۲۶
کعبی منحنیات، ۳۹۱
کوٹس کا طریقہ، تقریبی تکمل کا، ۳۵۴
کیسینی کے بیضے، ۴۴۰
گرد تدویر، ۴۰۷، ۴۰۹
گردشی سطح، اس کا رقبہ، ۳۴۹
اس کا اوسط مرکز، ۳۶۲
گرد و نئے، ۴۹۳، ۴۹۵، ۴۹۹
گھونگا منحنی، ۴۱۴، ۴۲۳
لمسی دائرہ، ۴۶۸
لفاف، ۴۷۰، ۴۷۵
لنگر چھلہ، ۳۲۷
لولبی، متساوی الزاویہ، ۴۲۱، ۴۶۰
ارشمیدس کا، ۴۱۲
متکافی، ۴۲۳
لیسازو کا منحنی، ۴۰۰
متغیر کی تبدیلی، تکمل میں، ۲۳۵، ۲۴۰
متکافی قطبی، ۴۳۲
متکافی لولب، ۴۲۳
متواتری منحنی، ۴۸۶
مخروط، قائم مستدیر، ۳۴۱، ۳۴۹، ۳۶۳

مرکز خط، ۵۰۱

مزدوج نقطہ، ۳۹۰

مساوی الزاویہ لولبی، ۴۲۱، ۴۶۰

مقناطیسی منحنی، ۴۴۱

مکانی، ۲۷۵، ۳۲۰، ۳۴۳، ۳۶۲، ۴۲۷، ۴۵۹، ۴۶۳، ۴۶۶، ۴۶۹، ۴۷۹،

مکافی نما، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۶۳

مماسی قطبی مساوات، ۴۲۶

ناقص، ۳۱۹، ۳۲۷، ۳۴۶، ۴۲۹، ۴۵۹، ۴۶۶، ۴۸۰، ۴۸۵، ۴۹۰، ۵۰۳،

ناقص نما، ۳۳۸، ۳۶۴

گردشی، اسکی سطح، ۳۵۲

ناقصی تکملے، ۳۴۷

نقطۂ گردونیہ، ۴۹۳، ۴۹۵

نیم کعبی مکافی، ۳۹۴

نیوٹن کا طریقہ، انحناء پر بحث کرنیکا، ۴۶۴

ہارٹ کا رابطہ، ۴۳۲

Sheikh-ul-Aalam Research
Accession No. 368
Class 513
Book No. LAM S
Date 19/5/79
Library Srinagar.